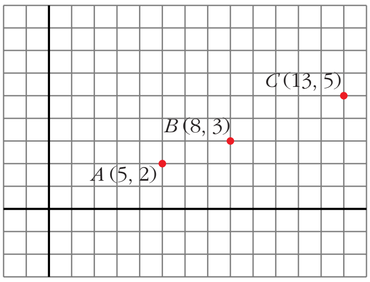
UNITAT 6 PUNTS, RECTES I PLANS EN L'ESPAI

Pàgina 134

1. *Punts alineats en el pla*

- **Comprova que els punts *A* (5, 2), *B* (8, 3) i *C* (13, 5) no estan alineats.**



$\overrightarrow{AB} = (3, 1)$; $\overrightarrow{BC} = (5, 2)$

No tenen les coordenades proporcionals; per tant no estan alineats.

- **Troba el valor de *n* perqué el punt *D* (9, *n*) estigui alineat amb els punts *A* i *B* del gràfic anterior.**

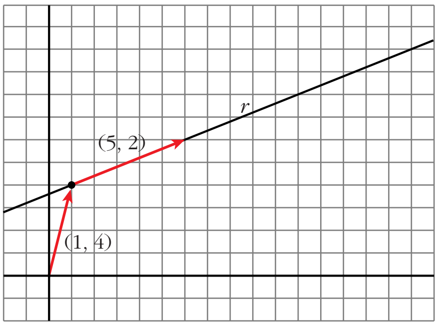
A, *B* i *D* estan alineats si $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BD}$ són L.D.

$\overrightarrow{AB} = (3, 1)$; $\overrightarrow{BD} = (1, n - 3)$

$$\frac{3}{1} = \frac{1}{n-3} \rightarrow 3(n-3) = 1 \rightarrow 3n - 9 = 1 \rightarrow n = \frac{10}{3}$$

Pàgina 135

2. *Rectes en el pla*



- **Per trobar les equacions paramètriques de la recta *r*, pren el vector $\vec{p}(1, 4)$ per situar-t'hi i el vector $\vec{d}(5, 2)$ per relliscar-hi.**

  Troba'n l'equació implícita.

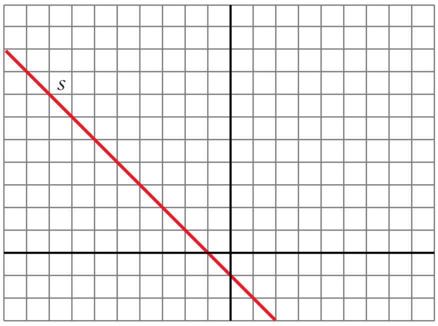
Equacions paramètriques:

$$\begin{cases} x = 1 + 5\lambda \\ y = 4 + 2\lambda \end{cases}$$

Equació implícita:

$$\begin{array}{r} -2x = -2 - 10\lambda \\ 5y = 20 + 10\lambda \\ \hline -2x + 5y = 18 \end{array} \quad \rightarrow \quad 2x - 5y + 18 = 0$$

■ **Troba les equacions paramètriques i l'equació implícita de la recta *s*:**



La recta *s* passa pel punt (–1, 0) i té la direcció del vector $\vec{d}(1, -1)$.

Equacions paramètriques:

$$\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -\lambda \end{cases}$$

Equació implícita:

Sumant les dues anteriors: $x + y = -1 \quad \rightarrow \quad x + y + 1 = 0$.

Pàgina 136

1. **Representa els punts següents:**
P(5, 2, 3), Q(3, –2, 5), R(1, 4, 0), S(0, 0, 4) i T(0, 6, 3).

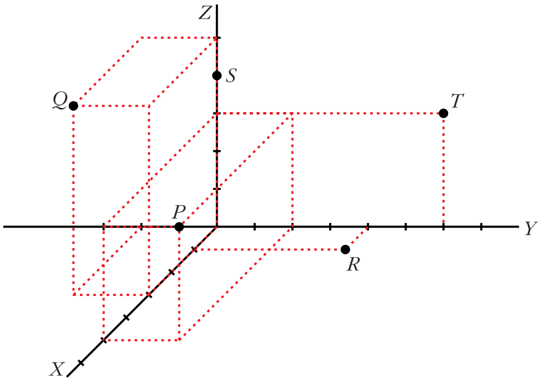
P(5, 2, 3)

Q(3, –2, 5)

R(1, 4, 0)

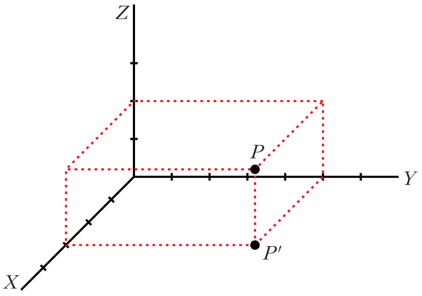
S(0, 0, 4)

T(0, 6, 3)



2. **Situa sobre uns eixos coordenats un punt *P*. Projecta'l, *P'*, sobre el pla *XY*. Continua el procés fins a determinar les coordenades de *P*. (Observa que l'únic pas no determinat és decidir la situació de *P'*.)**

$P(3, 5, 2)$



Pàgina 138

3. **Calcula *m* i *n* per tal que els punts *P* (7, –1, *m*), *Q* (8, 6, 3), *R* (10, *n*, 9) estiguin alineats.**

Si P, Q i R alineats $\to$ $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{QR}$ han de ser proporcionals

$\overrightarrow{PQ} = (1, 7, 3 - m) \to m = 0$

$QR = (2, n - 6, 6) \to \dfrac{2}{1} = \dfrac{n-6}{7} = \dfrac{6}{3-m} \to 14 = n - 6 \to n = 20$

4. **Troba les coordenades dels punts mitjans dels costats del triangle *A* (1, –3, 5), *B* (0, 7, 2), *C* (–1, 5, 6).**

Punt mig A i $B = \left(\dfrac{1+0}{2}, \dfrac{-3+7}{2}, \dfrac{5+2}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}, 2, \dfrac{7}{2}\right)$

Punt mig A i $C = \left(\dfrac{1+(-1)}{2}, \dfrac{-3+5}{2}, \dfrac{5+6}{2}\right) = \left(0, 1, \dfrac{11}{2}\right)$

Punt mig B i $C = \left(\dfrac{0+(-1)}{2}, \dfrac{7+5}{2}, \dfrac{2+6}{2}\right) = (-1/2, 6, 4)$

5. **Donats els punts *A* (–3, 5, 11), *B* (3, 5, –1)**

a) Troba el punt mitjà del segment *AB*.

b) Troba el simètric de *B* respecte de *A*.

c) Obtén un punt *M* de *AB* tal que $\overline{AM} = 2\,\overline{MB}$.

d) Obtén un punt *N* de *AB* tal que $\overline{NB} = 3\,\overline{AN}$.

a) Punt mig = (0, 5, 5)

b) $A = \dfrac{B + S}{2}$

$$-3 = \frac{3 + S_x}{2} \to S_x = -9$$

$$5 = \frac{5 + S_y}{2} \to S_y = 5$$

$$11 = \frac{-1 + S_z}{2} \to S_z = 23$$

S = (–9, 5, 23)

c) $\overrightarrow{AM} = (M_x + 3,\ M_y - 5,\ M_z - 11)$

$\overrightarrow{MB} = (3 - M_x,\ 5 - M_y,\ -1 - M_z)$

$M_x + 3 = 2\ (3 - M_x)$, $\quad M_y - 5 = (5 - M_y)$ $\quad M_z - 11 = 2\ (-1 - M_z)$

$M_x = 1$ $\quad M_y = 5$ $\quad M_z = 3$

$M = (1, 5, 3)$

d) $\overrightarrow{AN} = (N_x + 3,\ N_y - 5,\ N_z - 11)$

$\overrightarrow{NB} = (3 - N_x,\ 5 - N_y,\ -1 - N_z)$

$N_x + 3 = 3\ (3 - N_x)$, $\quad (N_y - 5) = 3 \cdot (5 - N_y)$ $\quad N_z - 11 = 3 \cdot (-1 - N_z)$

$N_x + 3/2$ $\quad N_y = 5$ $\quad N_z = 2$

$N = (3/2, 5, 2)$

Pàgina 139

6. Troba les equacions paramètriques de les rectes que passen per:

a) ***A*** **(2, 0, 5) i** ***B*** **(–1, 4, 6)** **b)** ***M*** **(5, 1, 7) i** ***N*** **(9, –3, –1)**

c) ***P*** **(1, 0, –3) i** ***Q*** **(1, 4, –3)** **d)** ***R*** **(0, 2, 3) i** ***S*** **(0, 2, 1)**

a) Vector direcció: $\overrightarrow{AB} = (-3, 4, 1)$

Equacions paramètriques: $\begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$

b) Vector direcció: $\overrightarrow{MN} = (4, -4, -8) \,//\, (1, -1, -2)$

Equacions paramètriques: $\begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 7 - 2\lambda \end{cases}$

c) Vector direcció: $\overrightarrow{PQ} = (0, 4, 0)$

Equacions paramètriques: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4\lambda \\ z = -3 \end{cases}$

d) Vector direcció: $\overrightarrow{RS} = (0, 0, -2)$

Equacions paramètriques: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$

Pàgina 141

7. Obtén les equacions paramètriques, l'equació en forma contínua i les equacions implícites de la recta que passa per aquests punts: (–5, 3, 7) i (2, –3, 3).

Vector direcció: (2, –3, 3) – (–5, 3, 7) = (7, –6, –4)

Equacions paramètriques:

$$\begin{cases} x = 2 + 7\lambda \\ y = -3 - 6\lambda \\ z = 3 - 4\lambda \end{cases}$$

Equació contínua:

$$\frac{x-2}{7} = \frac{y+3}{-6} = \frac{z-3}{-4}$$

Equacions implícites:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-2}{7} = \frac{y+3}{-6} \quad &\rightarrow \quad -6x + 12 = 7y + 21 \\ \frac{x-2}{7} = \frac{z-3}{-4} \quad &\rightarrow \quad -4x + 8 = 7z - 21 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} 6x + 7y + 9 = 0 \\ 4x + 7z - 29 = 0 \end{cases}$$

8. Localitza sis punts, a més dels donats, de la recta anterior.

Si donem valors a λ, obtenim:

$\lambda = 1 \rightarrow (9, 9, -1)$

$\lambda = 2 \rightarrow (16, -15, -5)$

$\lambda = 3 \rightarrow (23, -21, -9)$

$\lambda = 4 \rightarrow (30, -27, -13)$

$\lambda = -2 \rightarrow (-12, 9, 11)$

$\lambda = -3 \rightarrow (-19, 15, 15)$

(Per a $\lambda = 0$ i $\lambda = -1$, obtenim els punts que teníem.)

9. Comprova si algun dels punts que es donen a continuació pertanyen o no a la recta donada *r*:

***A* (5, 0, 0) *B* (3, 3, 4) *C* (15, –15, 4) *D* (1, 6, 0)**

$A \notin r$, ja que $z \neq 4$

$$B: \left.\begin{cases} 5 - 2\lambda = 3 & \rightarrow \quad \lambda = 1 \\ 3\lambda = 3 & \rightarrow \quad \lambda = 1 \\ 4 = 4 & \end{cases}\right\} B \in r$$

$$C: \left.\begin{cases} 5 - 2\lambda = 15 & \rightarrow \quad \lambda = -5 \\ 3\lambda = -15 & \rightarrow \quad \lambda = -5 \\ 4 = 4 & \end{cases}\right\} C \in r$$

$D \notin r$, ja que $z \neq 4$

Pàgina 145

10. **Estudia les posicions relatives dels parells de rectes que apareixen en aquests apartats. Quan es tallen, calcula el punt en què ho fan:**

$$\textbf{a)}\ \left\{\begin{array}{l} x = \ \ 1 - 5\lambda \\ y = \ \ 2 + 3\lambda \\ z = -5 + \ \ \lambda \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{array}\right. \qquad \textbf{b)}\ \left\{\begin{array}{l} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 - \ \ \lambda \\ z = 5 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x = -1 - 6\lambda \\ y = \ \ 3 + 3\lambda \\ z = \ \ 5 \end{array}\right.$$

a) $P = (1, 2, -5)$ $\qquad \vec{d}_1 = (-5, 3, 1)$

$Q = (1, 1, 0)$ $\qquad \vec{d}_2 = (0, 0, 1)$

$\vec{PQ} = (0, -1, 5)$

$$M' = \left(\begin{matrix} \underbrace{\begin{matrix} -5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}}_{M} & \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{matrix} \end{matrix}\right); \quad |M'| = -5 \ \to\ ran\,(M') = 3 \ \to\ \text{Les rectes es creuen.}$$

b) $P = (3, 1, 5)$ $\qquad \vec{d}_1 = (2, -1, 0)$

$Q = (-1, 3, 5)$ $\qquad \vec{d}_2 = (-6, 3, 0)$

$\vec{PQ} = (-4, 2, 0)$

$$M' = \left(\begin{matrix} \underbrace{\begin{matrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{matrix}}_{M} & \begin{matrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} \end{matrix}\right); \quad ran\,(M) = ran\,(M') = 1 \ \to\ \text{Les dues rectes coincideixen.}$$

11. **Estudia les posicions relatives dels parells de rectes que apareixen en aquests apartats. Quan es tallen, calcula el punt en què ho fan:**

$$\textbf{a)}\ \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 3 \\ z = \lambda \end{array}\right. \qquad \textbf{b)}\ \left\{\begin{array}{l} x = \ \ 3 + \lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = \ \ 1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x = \qquad -2\lambda \\ y = \ \ 3 + 2\lambda \\ z = -1 \end{array}\right.$$

a) $P = (0, 0, 0)$ $\qquad \vec{d}_1 = (1, 1, 0)$

$Q = (3, 3, 0)$ $\qquad \vec{d}_2 = (0, 0, 1)$

$\vec{PQ} = (3, 3, 0)$

$$M' = \left(\begin{matrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{M} & \begin{matrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{matrix} \end{matrix}\right); \quad ran\,(M) = ran\,(M') = 2 \ \to\ \text{Les rectes es tallen.}$$

Busquem el punt de tall:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = 3 \\ \lambda = 3 \\ 0 = \mu \end{array}\right\} \ \text{Es tallen en el punt } (3, 3, 0).$$

b) $P = (3, -2, 1)$ $\qquad \vec{d}_1 = (1, -1, 0)$

$Q = (0, 3, -1)$ $\qquad \vec{d}_2 = (-2, 2, 0)$

$\overrightarrow{PQ} = (-3, 5, -2)$

$$M' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix}}_{M} \begin{matrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{matrix}\right); \quad ran\ (M) = 1; \quad ran\ (M') = 2 \quad \to \quad \text{Les rectes són paral·leles.}$$

Pàgina 147

12. a) Troba les equacions paramètriques i l'equació implícita del pla que passa per $P(1, 7, -2)$, $Q(4, 5, 0)$ i $R(6, 3, 8)$.

b) Troba uns altres tres punts del pla.

c) Calcula n perquè $A(1, n, 5)$ pertanyi al pla.

a) El pla és paral·lel a $\overrightarrow{PQ} = (3, -2, 2)$ i a $\overrightarrow{QR} = (2, -2, 8) \mathbin{//} (1, -1, 4)$.

Equacions paramètriques:
$$\begin{cases} x = 4 + 3\lambda + \mu \\ y = 5 - 2\lambda - \mu \\ z = 2\lambda + 4\mu \end{cases}$$

Equació implícita:

Un vector normal al pla és: $(3, -2, 2) \times (1, -1, 4) = (-6, -10, -1) \mathbin{//} (6, 10, 1)$.

L'equació és: $6(x - 4) + 10(y - 5) + 1(z - 0) = 0$, és a dir: $6x + 10y + z - 74 = 0$.

b) $\left(\dfrac{37}{3}, 0, 0\right)$; $\left(0, \dfrac{37}{5}, 0\right)$; $(0, 0, 74)$

c) Substituïm a l'equació: $6 \cdot 1 + 10 \cdot n + 5 - 74 = 0 \quad \to \quad 6 + 10n + 5 - 74 = 0$.

$10n = 63 \quad \to \quad n = \dfrac{63}{10}$

Pàgina 149

13. Estudia la posició relativa del pla i de la recta:

$$\pi\text{: } 2x - y + 3z = 8 \qquad r\text{: } \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

Busquem els punts de tall de r i π:

$2(2 + 3\lambda) - (-1 + 3\lambda) + 3(-\lambda) = 8$

$4 + 6\lambda + 1 - 3\lambda - 3\lambda = 8 \quad \to \quad 0\lambda = 3 \quad \to$ No té solució.

La recta i el pla **són paral·lels**, ja que no tenen cap punt en comú.

14. **Donats aquests tres plans, estudia'n la posició relativa entre cada dos d'aquests:**

$$2x - y + 3z = 8 \qquad x + 3y - z = 5 \qquad 2x + 6y - 2z = 5$$

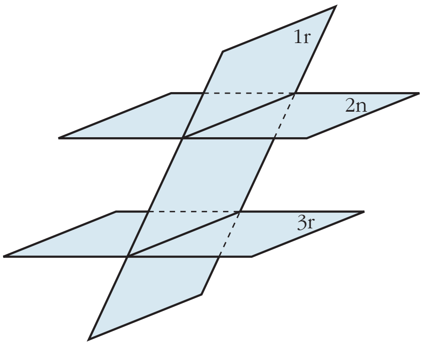
Tenen els tres plans cap punt en comú?

$\left.\begin{array}{r} 2x - y + 3z = 8 \\ x + 3y - z = 5 \end{array}\right\}$ Es tallen en una recta.

$\left.\begin{array}{r} x + 3y - z = 5 \\ 2x + 6y - 2z = 5 \end{array}\right\}$ Són paral·lels.

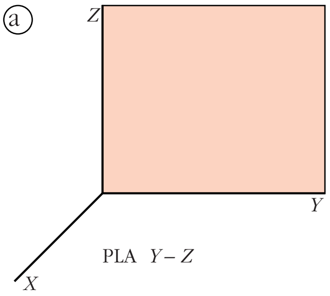
$\left.\begin{array}{r} 2x - y + 3z = 8 \\ 2x + 6y - 2z = 5 \end{array}\right\}$ Es tallen en una recta.

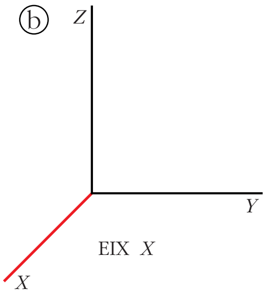
No hi ha cap punt comú als tres plans.

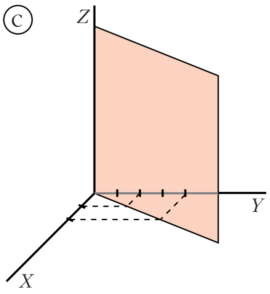


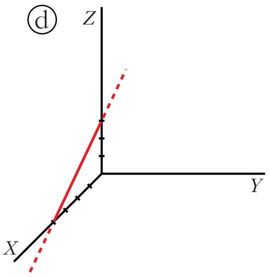
Pàgina 151

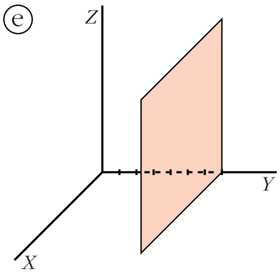
■ **Escriu les equacions implícites i paramètriques de les figures següents:**

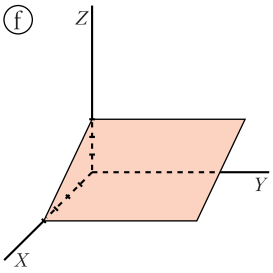
ⓐ


ⓑ


ⓒ


ⓓ


ⓔ


ⓕ


a) x sempre val 0.

y pot adoptar qualsevol valor.

z pot adoptar qualsevol valor.

$$\pi: \; x = 0 \quad \rightarrow \quad \pi: \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{array}\right.$$

b) x pot adoptar qualsevol valor.

y sempre val 0.

z sempre val 0.

$$\text{Eix } X\text{: } \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \text{ Eix } X\text{: } \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

c) z pot adoptar qualsevol valor.

El pla π en la seva intersecció amb el pla XY determina la recta r d'equació:

r: $x - y = 0$

Així, en l'espai XYZ:

$$\pi\text{: } x - y = 0 \rightarrow \pi\text{: } \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

d) Calculem l'equació de la recta en el pla XZ:

r passa per $A(4, 0)$ i $B(0, 3)$ $\rightarrow$ $\overrightarrow{AB} = (-4, 3)$

$$r\text{: } \begin{cases} x = 4 - 4\lambda \\ z = \quad\ \ 3\lambda \end{cases} \rightarrow \lambda = \frac{z}{3}$$

$$x = 4 - \frac{4}{3}z$$

r: $3x + 4z = 12$ en el pla XZ.

En l'espai XYZ la recta no adopta valors en y, per tant, $y = 0$. Així doncs l'equació de la recta r en l'espai XYZ és:

$$r\text{: } \begin{cases} y = 0 \\ 3x + 4z = 12 \end{cases} \rightarrow r\text{: } \begin{cases} x = 4 - 4\lambda \\ y = 0 \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

e) x pot adoptar qualsevol valor.

z pot adoptar qualsevol valor.

y sempre val 7.

$$\pi\text{: } y = 7 \rightarrow \pi\text{: } \begin{cases} x = \lambda \\ y = 7 \\ z = \mu \end{cases}$$

f) y pot tenir qualsevol valor.

Calculem la recta que determina el pla π en la seva intersecció amb el pla XZ:

r passa per $A(4, 0)$ i $B(0, 3)$.

Per l'apartat *d)*:

r: $3x + 4z = 12$ en el pla XZ.

Així:

$$\pi\text{: } 3x + 4z = 12 \quad \rightarrow \quad \pi\text{: } \begin{cases} x = 4 - 4\lambda \\ y = \mu \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

■ **Representa les figures donades per les equacions següents:**

a) $z = 4$ **b)** $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 4 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 4 \end{cases}$

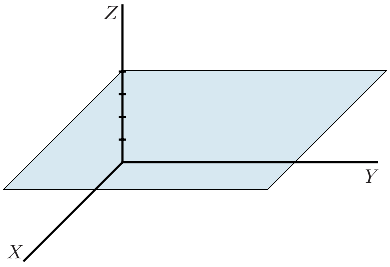
e) $\begin{cases} y = 0 \\ z = 4 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ **g)** $y = 0$ **h)** $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$

i) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 5 \end{cases}$ **j)** $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = \rho \end{cases}$ **k)** $x + y + z = 1$ **l)** $\begin{cases} x + y + z \le 1 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ z \ge 0 \end{cases}$

Atenció! Una d'aquestes representa un punt i una altra, tot l'espai. N'hi ha una que té dos paràmetres, però actuen com si només n'hi hagués un.

a) $z = 4$ → z sempre val 4.

x i y poden adoptar qualsevol valor.

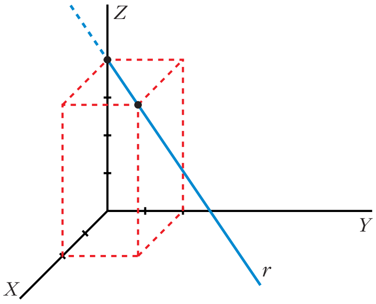


b) $\begin{cases} x = \lambda & \rightarrow \ x \text{ pot adoptar qualsevol valor.} \\ y = \mu & \rightarrow \ y \text{ pot adoptar qualsevol valor.} \\ z = 4 & \rightarrow \ z \text{ sempre val 4.} \end{cases}$

És el mateix pla que el de l'apartat anterior.

c) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 4 \end{cases}$ $\begin{matrix} \searrow \\ \nearrow \end{matrix}$ x i y sempre adopten el mateix valor.
$z = 4$ → z sempre val 4.

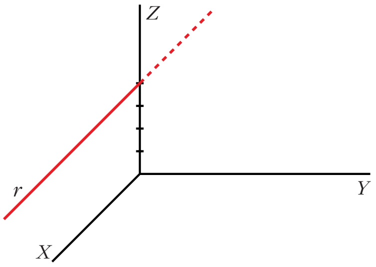
Com que només hi ha un paràmetre, és una recta (paral·lela al pla XY).



d) $\begin{cases} x = \lambda & \rightarrow \quad x \text{ pot adoptar qualsevol valor.} \\ y = 0 & \rightarrow \quad y \text{ sempre val } 0. \\ z = 4 & \rightarrow \quad z \text{ sempre val } 4. \end{cases}$

Com que només hi ha un paràmetre, és una recta.

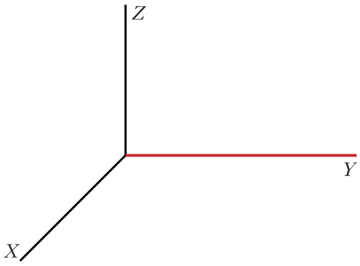
Com que $y = 0$ sempre, és una recta del pla XZ.



e) $\begin{cases} y = 0 \\ z = 4 \end{cases}$ És l'equació implícita de la recta anterior.

f) $\begin{cases} x = 0 & \rightarrow \quad x \text{ sempre val } 0. \\ z = 0 & \rightarrow \quad z \text{ sempre val } 0. \\ & \quad y \text{ pot adoptar qualsevol valor.} \end{cases}$

És l'equació de l'eix Y.

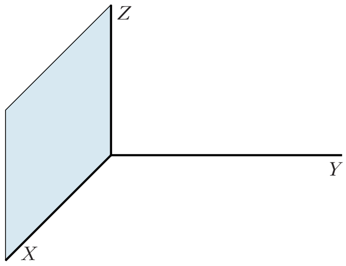


g) $y = 0 \quad \rightarrow \quad y$ sempre val 0.

x pot adoptar qualsevol valor.

z pot adoptar qualsevol valor.

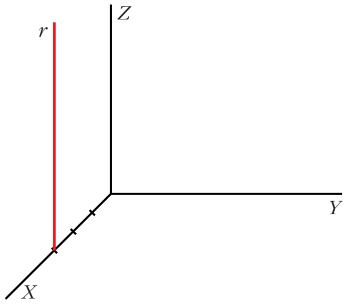
És l'equació del pla XZ.



h) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = \lambda + \mu \end{cases} \quad \rightarrow \quad$ si fem $\lambda + \mu = \rho$, $\rho \in \mathbb{R}$, tenim:

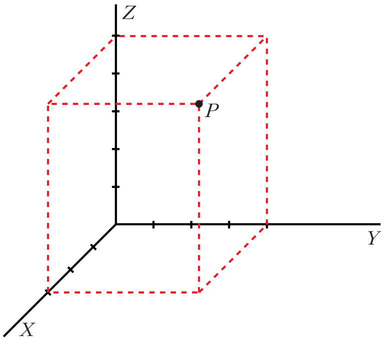
$\begin{cases} x = 3 & \rightarrow \quad x \text{ sempre val } 3. \\ y = 0 & \rightarrow \quad y \text{ sempre val } 0. \quad \rightarrow \quad \text{Ens movem en el pla } XZ. \\ z = \rho & \rightarrow \quad z \text{ pot adoptar qualsevol valor.} \end{cases}$

Com que només hi ha un paràmetre, és una recta.



i) $\begin{cases} x = 3 & \rightarrow \quad x \text{ sempre val } 3. \\ y = 4 & \rightarrow \quad y \text{ sempre val } 4. \\ z = 5 & \rightarrow \quad z \text{ sempre val } 5. \end{cases}$

És un punt.



j) $\begin{cases} x = \lambda & \rightarrow \quad x \text{ pot adoptar qualsevol valor.} \\ y = \mu & \rightarrow \quad y \text{ pot adoptar qualsevol valor.} \\ z = \rho & \rightarrow \quad z \text{ pot adoptar qualsevol valor.} \end{cases}$

Representa tot l'espai.

k) $x + y + z = 1$

Calculem les interseccions amb els eixos:

Eix X:

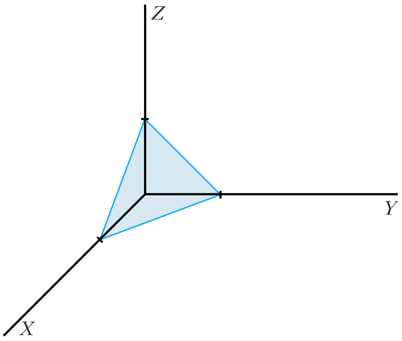
$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \quad x = 1 \quad \rightarrow \quad (1, 0, 0)$

Eix Y:

$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \quad y = 1 \quad \rightarrow \quad (0, 1, 0)$

Eix Z:

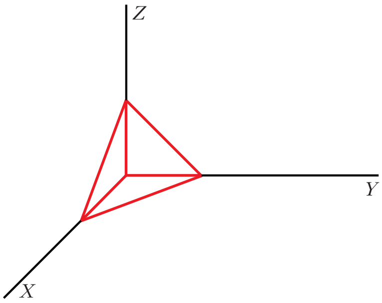
$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \quad z = 1 \quad \rightarrow \quad (0, 0, 1)$



l) $\begin{cases} x + y + z \leq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$

$x + y + z \leq 1 \rightarrow$ Descriu la regió limitada pel pla anterior, les coordenades de la qual estan per sota d'aquest.

$x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ — Les tres variables han de ser positives.

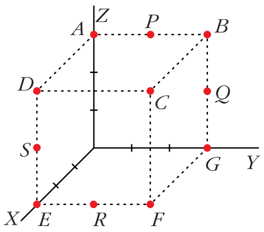


Representa la regió compresa entre la part positiva dels plans XY, YZ, XZ i el pla $x + y + z = 1$.

Pàgina 157

EXERCICIS I PROBLEMES PROPOSATS

Punts



15. **Les coordenades dels punts representats en aquesta figura són:**

(0, 0, 3); (0, 3, 3); (3, 3, 3); (3, 0, 3); (3, 0, 0); (3, 3, 0); (0, 3, 0); (0, 3/2, 3); (0, 3, 3/2); (3, 3/2, 0); (3, 0, 3/2)

Associa a cada punt les seves coordenades.

$A(0, 0, 3)$; $B(0, 3, 3)$; $C(3, 3, 3)$; $D(3, 0, 3)$; $E(3, 0, 0,)$; $F(3, 3, 0)$; $G(0, 3, 0)$; $P(0, 3/2, 3)$; $Q(0, 3, 3/2)$; $R(3, 3/2, 0)$; $S(3, 0, 3/2)$

16. **Comprova si els punts $A(1, -2, 1)$, $B(2, 3, 0)$ i $C(-1, 0, -4)$ estan alineats.**

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}\,(1, 5, -1)\\ \overrightarrow{AC}\,(-2, 2, -5)\end{array}\right\}$$

Les seves coordenades no són proporcionals. Per tant els punts **no** estan alineats.

17. **Troba els punts P i Q tals que $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AQ}$, essent $A(2, 0, 1)$ i $B(7, 5, 4)$.**

- Si $Q(x, y, z)$, aleshores $\overrightarrow{AQ}(x-2, y, z-1)$:

$$\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{5}(5, 5, 3) = \left(3, 3, \frac{9}{5}\right) = (x-2, y, z-1)$$

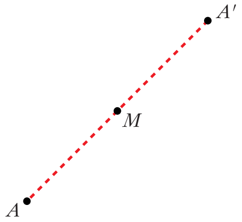
$$\left.\begin{array}{l} x-2=3 \;\rightarrow\; x=5 \\ y=3 \\ z-1=\frac{9}{5} \;\rightarrow\; z=\frac{14}{5}\end{array}\right\} Q\left(\frac{19}{5}, \frac{9}{5}, \frac{-4}{5}\right)$$

- Si $P(a, b, c)$, aleshores $\overrightarrow{AP}(a-2, b, c-1)$:

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}(5, 5, 3) = \left(2, 2, \frac{6}{5}\right) = (a-2, b, c-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} a-2=2 \;\rightarrow\; x=4 \\ b=2 \\ c-1=\frac{6}{5} \;\rightarrow\; c=\frac{11}{5}\end{array}\right\} P\left(\frac{16}{5}, \frac{6}{5}, \frac{-1}{5}\right)$$

18. Troba el simètric del punt $A\,(-2, 3, 0)$ respecte del punt $M\,(1, -1, 2)$.



Sigui $A'(x, y, z)$ el simètric de A respecte del punt M.

Com que M és el punt mitjà del segment AA', aleshores:

$$\left(\frac{x-2}{2}, \frac{y+3}{2}, \frac{z}{2}\right) = (1, -1, 2)$$

$$\frac{x-2}{2} = 1 \rightarrow x = 4; \ \frac{y+3}{2} = -1 \rightarrow y = -5; \ \frac{z}{2} = 2 \rightarrow z = 4$$

Per tant: $A'(4, -5, 4)$.

19. Calcula a i b perquè els punts $A\,(1, 2, -1)$, $B\,(3, 0, -2)$ i $C\,(4, a, b)$ estiguin alineats.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}\,(2, -2, -1) \\ \overrightarrow{AC}\,(3, a-2, b+1) \end{array}\right\}$$ Perquè estiguin alineats ha de ser: $\frac{3}{2} = \frac{a-2}{-2} = \frac{b+1}{-1}$.

Per tant:

$$\frac{a-2}{-2} = \frac{3}{2} \rightarrow a - 2 = -3 \rightarrow a = -1$$

$$\frac{b+1}{-1} = \frac{3}{2} \rightarrow b = \frac{-3}{2} - 1 \rightarrow b = \frac{-5}{2}$$

Rectes

20. Escriu les equacions paramétriques i les equacions implícites dels eixos de coordenades.

Eix X $P_z(0, 0, 0)$ $\vec{v} = (1, 0, 0)$

paramètriques $\left\{\begin{array}{l} x = 0 + \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$ implícites $\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{0}$

Eix Y $P_z(0, 0, 0)$ $\vec{v} = (0, 1, 0)$

paramètriques $\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 + \lambda \\ z = 0 \end{array}\right.$ implícites $\frac{x-0}{0} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{0}$

Eix Z $P_z(0, 0, 0)$ $\vec{v} = (0, 0, 1)$

paramètriques $\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 + \lambda \end{array}\right.$ implícites $\frac{x-0}{0} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{0}$

21. Escriu les equacions de la recta que passa pels punts $A(-3, 2, 1)$ i $B\left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$.

Un vector direcció de la recta r és $\overrightarrow{AB}\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, -1\right)$.

Adoptem el vector $\vec{d}(1, -1, -2) \parallel \overrightarrow{AB}$.

- *Equació vectorial:*

$$(x, y, z) = (-3, 2, 1) + \lambda(1, -1, -2)$$

- *Equacions paramètriques:*

$$\begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

- *Forma contínua:*

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-2}$$

- *Forma implícita:*

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-1} \rightarrow -x-3 = y-2 \rightarrow x+y+1=0 \\ \frac{x+3}{1} = \frac{z-1}{-2} \rightarrow -2x-6 = z-1 \rightarrow 2x+z+5=0 \end{array}\right\}$$

22. Comprova si hi ha alguna recta que passi pels punts $P(3, 1, 0)$, $Q(0, -5, 1)$ i $R(6, -5, 1)$.

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}(-3, -6, 1) \\ \overrightarrow{PR}(3, -6, 1) \end{array}\right\}$ Les coordenades no són proporcionals, per tant els punts **no** estan alineats.

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{QP}(3, 6, -1) \\ \overrightarrow{QR}(6, 0, 0) \end{array}\right\}$ Com que no són proporcionals, els punts P, Q i R formen un triangle ja que no estan alineats.

No hi ha cap recta que passi pels 3 punts.

23. Troba les equacions de la recta que passa pel punt $A(-4, 2, 5)$ i és paral·lela a l'eix OZ.

Si és paral·lela a l'eix OZ, té com a vector direcció $(0, 0, 1)$.

- *Equació vectorial:*

$$(x, y, z) = (-4, 2, 5) + \lambda(0, 0, 1)$$

- *Equacions paramètriques:*

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$$

- *Forma contínua:*

$$\frac{x+4}{0} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-5}{1}$$

- *Forma implícita:*

$$\left.\begin{array}{lcl} x = -4 & \rightarrow & x + 4 = 0 \\ y = \ \ 2 & \rightarrow & y - 2 = 0 \end{array}\right\}$$

24. **Escriu les equacions de la recta que passa pel punt $P(1, -3, 0)$ i és paral·lela al vector $\vec{u} \times \vec{v}$, essent $\vec{u}(1, -1, 2)$ i $\vec{v}(2, 0, 0)$.**

$$\vec{u} \times \vec{v} = (0, 4, 2) \,//\, (0, 2, 1)$$

- *Equació vectorial:*

$$(x, y, z) = (1, -3, 0) + \lambda(0, 2, 1)$$

- *Equacions paramètriques:*

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

- *Forma contínua:*

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-0}{1}$$

- *Forma implícita:*

$$\left.\begin{array}{lcccl} x = 1 & & & \rightarrow & x - 1 = 0 \\ \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z}{1} & \rightarrow & y + 3 = 2z & \rightarrow & y - 2z + 3 = 0 \end{array}\right\}$$

25. **Estudia la posició relativa de les rectes següents i troba'n el punt de tall, quan sigui possible:**

a) $r: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{4}$ $\qquad$ $s: \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{3}$

b) $r: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{1}$ $\qquad$ $s: \dfrac{x-4}{4} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-5}{2}$

c) $r: \dfrac{x}{2} = y - 1 = \dfrac{z+1}{3}$ $\qquad$ $s: \left\{\begin{array}{l} x - 2y - \quad 1 = 0 \\ \quad 3y - z + 1 = 0 \end{array}\right.$

d) $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4}$ $\qquad$ $s: \left\{\begin{array}{l} x = 3 + 4\lambda \\ y = 3 + 6\lambda \\ z = 4 + 8\lambda \end{array}\right.$

a) $\vec{d}_r(3, 2, 4)$; $P(1, -2, 1)$

$\vec{d}_s(-1, 2, 3)$; $P'(-2, 3, 2)$

$\overrightarrow{PP'}(-3, 5, 1)$

$$M' = \left(\begin{matrix} \underbrace{\begin{matrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{matrix}}_{M} & \begin{matrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{matrix} \end{matrix}\right) \rightarrow |M'| = -51 \neq 0 \rightarrow \text{Les rectes es creuen.}$$

b) $\vec{d}_r(-1, 2, 1)$; $P(1, 1, 2)$

$\vec{d}_s(4, 1, 2)$; $P'(4, 4, 5)$

$\overrightarrow{PP'}(3, 3, 3)$

$$M' = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{M}\!\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow |M'| = 0 \text{ i } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow ran\,(M) = ran\,(M') = 2 \rightarrow$$

$\rightarrow$ Les rectes es tallen.

Per trobar el punt de tall, escrivim les dues rectes en forma paramètrica:

$$r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4 + 4\mu \\ y = 4 + \mu \\ z = 5 + 2\mu \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} 1 - \lambda &= 4 + 4\mu \\ 1 + 2\lambda &= 4 + \mu \\ 2 + \lambda &= 5 + 2\mu \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{Sumant la 1.}^{a} \text{ i la 3.}^{a}\text{: } 3 = 9 + 6\mu \rightarrow \mu = -1 \\ &\text{Substituint en la 1.}^{a}\text{: } 1 - \lambda = 4 - 4 \rightarrow \lambda = 1 \end{aligned}$$

Substituint $\lambda = 1$ en les equacions de r (o bé $\mu = -1$ en les de s), obtenim el punt de tall: (0, 3, 3).

c) $\vec{d}_r(2, 1, 3)$; $P(0, 1, -1)$

$\vec{d}_s(1, -2, 0) \times (0, 3, -1) = (2, 1, 3)$

Tenen la mateixa direcció, i el punt $P \in r$, però $P \notin s$, per això les rectes són paral·leles.

d) $\left.\begin{aligned} &\vec{d}_r(2, 3, 4) \\ &\vec{d}_s(4, 6, 8) \end{aligned}\right\}$ Tenen la mateixa direcció.

Vegem si el punt $P(1, 0, 0) \in r$, pertany també a s:

$$\left.\begin{aligned} 3 + 4\lambda = 1 &\rightarrow \lambda = -1/2 \\ 3 + 6\lambda = 0 &\rightarrow \lambda = -1/2 \\ 4 + 8\lambda = 0 &\rightarrow \lambda = -1/2 \end{aligned}\right\} P \in s$$

Per tant, les rectes r i s coincideixen, són la mateixa recta.

26. Obtén el valor de a per al qual les rectes r i s es tallen, i troba'n el punt de tall:

$$r: x = y = z - a \qquad s: \frac{2x - 1}{3} = \frac{y + 3}{-2} = \frac{z - 2}{0}$$

☛ ***En s, divideix per 2 el numerador i el denominador de la primera fracció.***

r: $x = y = z - a \rightarrow \vec{d}_r(1, 1, 1)$; $P(0, 0, a)$

$$s: \frac{x - 1/2}{3/2} = \frac{y + 3}{-2} = \frac{z - 2}{0} \rightarrow \vec{d}_s\left(\frac{3}{2}, -2, 0\right); \; P'\left(\frac{1}{2}, -3, 2\right)$$

$$PP'\left(\frac{1}{2}, -3, 2-a\right)$$

$$M' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 3/2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{matrix}}_{M} \quad \begin{matrix} 1/2 \\ -3 \\ 2-a \end{matrix}\right) \quad \rightarrow \quad ran\,(M) = 2$$

Perquè les rectes es tallin, ha de ser $ran\,(M') = 2$, és a dir, $|M'| = 0$:

$$|M'| = \frac{7a-21}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad a = 3$$

Per trobar el punt de tall, escrivim les rectes en forma paramètrica:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \qquad\qquad s: \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\mu \\ y = -3 - 2\mu \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mu \\ \lambda &= -3 - 2\mu \\ 3 + \lambda &= 2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &-1 = -3 - 2\mu \quad \rightarrow \quad \mu = -1 \\ &\lambda = -1 \end{aligned}$$

Substituint $\lambda = -1$ en les equacions de r (o $\mu = -1$ en les de s), obtenim el punt de tall: $(-1, -1, 2)$.

27. **Troba els valors de m i n perquè les rectes r i s siguin paral·leles:**

$$r: \begin{cases} x = 5 + 4\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \qquad\qquad s: \frac{x}{m} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{n}$$

$$\left.\begin{aligned} &\vec{d}_r(4, 1, -1) \\ &\vec{d}_s(m, 3, n) \end{aligned}\right\} \text{ Les coordenades han de ser proporcionals:}$$

$$\frac{m}{4} = \frac{3}{1} = \frac{n}{-1} \quad \rightarrow \quad m = 12, \quad n = -3$$

(El punt $P(0, 1, -3) \in s$; però $P \notin r$; per tant les dues rectes són paral·leles si $m = 12$ i $n = -3$.)

28. **a) Troba el vector director de la recta determinada pels plans**

$$\begin{cases} x - y \phantom{{}+z} = 0 \\ \phantom{x -{}} y + z = 2 \end{cases}$$

b) Escriu les equacions paramètriques de r.

a) $\vec{d} = (1, -1, 0) \times (0, 1, 1) = (-1, -1, 1)$

b) Obtenim un punt de la recta fent $y = 0$:

$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ z = 2 \end{array}\right\}$ El punt (0, 0, 2) pertany a la recta.

Equacions paramètriques: $\left\{\begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{array}\right.$

29. **Donada la recta** $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = z$**, expressa-la com a intersecció de dos plans.**

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} = z \;\rightarrow\; x = 2z \;\rightarrow\; x - 2z = 0 \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{-1} \;\rightarrow\; -x = 2y + 2 \;\rightarrow\; x + 2y + 2 = 0 \end{array}\right\}$$

Pàgina 158

Plans

30. **Troba les equacions dels plans següents:**

a) Determinat pel punt $A(1, -3, 2)$ **i pels vectors** $\vec{u}(2, 1, 0)$ **i** $\vec{v}(-1, 0, 3)$**.**

b) Passa pel punt $P(2, -3, 1)$ **i el vector normal del qual és** $\vec{n}(5, -3, -4)$**.**

c) Perpendicular a la recta $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{3}$ **i que passa pel punt (1, 0, 1).**

a) $\vec{u} \times \vec{v} = (2, 1, 0) \times (-1, 0, 3) = (3, -6, 1)$

$3(x - 1) - 6(y + 3) + (z - 2) = 0$

$3x - 6y + z - 23 = 0$

b) $5(x - 2) - 3(y + 3) - 4(z - 1) = 0$

$5x - 3y - 4z - 15 = 0$

c) $\vec{n}(2, -1, 3)$

$2(x - 1) - (y - 0) + 3(z - 1) = 0$

$2x - y + 3z - 5 = 0$

31. **Troba les equacions paramètriques i implícites dels plans** OXY**,** OYZ**,** OXZ**.**

Pla OXY:

Paramètriques: $\left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 0 \end{array}\right.$ Implícita: $z = 0$

Pla OYZ:

Paramètriques: $\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{array}\right.$ Implícita: $x = 0$

Pla *OXZ*:

Paramètriques: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \mu \end{cases}$ Implícita: $y = 0$

32. **Escriu les equacions paramètriques dels plans:**

a) $z = 3$ **b)** $x = -1$ **c)** $y = 2$

a) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = -1 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 \\ z = \mu \end{cases}$

33. **Quin és el vector normal del pla $x = -1$?**

Escriu les equacions d'una recta perpendicular a aquest pla que passi per $A\,(2, 3, 0)$.

El vector normal al pla $x = -1$ és $\vec{n}(1, 0, 0)$.

Recta: $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$

34. **Calcula m i n perquè els plans: $\alpha: mx + y - 3z - 1 = 0$ i $\beta: 2x + ny - z - 3 = 0$ siguin paral·lels. Poden ser coincidents?**

$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\alpha(m, 1, -3) \\ \vec{n}_\beta(2, n, -1) \end{array}\right\}$ Les coordenades han de ser proporcionals:

$$\frac{m}{2} = \frac{1}{n} = \frac{-3}{-1} \quad \to \quad m = 6, \quad n = \frac{1}{3}$$

Així, quedaria:

$$\begin{cases} \alpha: 6x + y - 3z - 1 = 0 & \to \quad 6x + y - 3z - 1 = 0 \\ \beta: 2x + \dfrac{1}{3}y - z - 3 = 0 & \to \quad 6x + y - 3z - 9 = 0 \end{cases}$$

Els plans són paral·lels, no coincidents. No poden ser coincidents ja que els termes independents no són proporcionals als anteriors.

35. **Escriu l'equació del pla que passi pels punts (0, 0, 0), (2, 2, 0) i (1, 1, 2).**

$(2, 2, 0) \times (1, 1, 2) = (4, -4, 0) \quad \to \quad \vec{n}(1, -1, 0)$

$P(0, 0, 0)$

El pla és: $x - y = 0$.

36. **Determina l'equació del pla que conté el punt $P(2, 1, 2)$ i la recta:**

$$x - 2 = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-3}$$

Si conté la recta, contindrà el punt $Q(2, 3, 4)$ i serà paral·lel a $\vec{d}(1, -1, -3)$.

També serà paral·lel a $\overrightarrow{PQ}(0, 2, 2)$ // $(0, 1, 1)$.

Un vector normal al pla és: $(1, -1, -3) \times (0, 1, 1) = (2, -1, 1)$.

L'equació del pla és: $2(x - 2) - (y - 1) + (z - 2) = 0$

$$2x - y + z - 5 = 0$$

37. **Comprova que les rectes:**

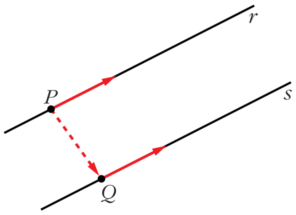
$$r: \frac{x-1}{2} = y = z - 2 \qquad s: \begin{cases} x - \ 2z = 5 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$$

són paral·leles, i troba l'equació del pla que les conté.

$\vec{d}_r(2, 1, 1)$; $P(1, 0, 2)$

$\vec{d}_s = (1, 0, -2) \times (1, -2, 0) = (-4, -2, -2)$ // $(2, 1, 1)$

Les rectes r i s tenen la mateixa direcció. A més, $P(1, 0, 2) \in r$, però $P \notin s$. Per tant les rectes són paral·leles.



Obtenim un punt, Q, de s fent $y = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} x - 2z = 5 \\ x = 11 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 11 \\ z = \ \ 3 \end{array}\right\} Q(11, 0, 3)$$

El pla que busquem serà paral·lel a $\vec{d}_r(2, 1, 1)$ i a $\overrightarrow{PQ}(10, 0, 1)$. Un vector normal és: $(2, 1, 1) \times (10, 0, 1) = (1, 8, -10)$.

L'equació del pla serà: $1 \cdot (x - 1) + 8 \cdot (y - 0) - 10 \cdot (z - 2) = 0$

$$x + 8y - 10z + 19 = 0$$

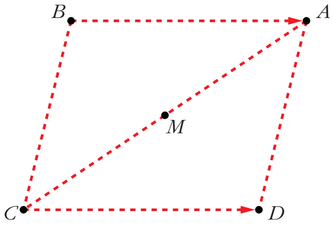
38. **Són coplanaris els punts $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(2, 1, 0)$ i $D(-1, 2, 1)$?**

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (1, 1, 0) \\ \overrightarrow{AD} = (-2, 2, 1) \end{array}\right\} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Els punts *no* són coplanaris.

PER RESOLDRE

39. **Els punts $A(1, 3, -1)$, $B(2, 0, 2)$ i $C(4, -1, -3)$ són vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram. Troba el vèrtex D i el centre del paral·lelogram.**



Si $D(x, y, z)$ és l'altre vèrtex:

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \rightarrow (-1, 3, -3) = (x - 4, y + 1, z + 3)$

$$\left.\begin{cases} x - 4 = -1 \rightarrow x = 3 \\ y + 1 = 3 \rightarrow y = 2 \\ z + 3 = -3 \rightarrow z = -6 \end{cases}\right\} D(3, 2, -6)$$

Si M és el centre del paral·lelogram, és el punt mitjà de $\overrightarrow{AC}$:

$$M = \left(\frac{4+1}{2}, \frac{-1+3}{2}, \frac{-3-1}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 1, -2\right)$$

40. **Calcula b perquè les rectes r i s es tallin. Quin és el punt de tall?**

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z+1}{2} \qquad s: \frac{x}{4} = \frac{y-b}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

$\vec{d}_r(2, -3, 2)$; $P(1, -5, -1)$

$\vec{d}_s(4, -1, 2)$; $P'(0, b, 1)$

$\overrightarrow{PP'}(-1, b+5, 2)$

$$M' = \left(\begin{array}{cc} \underbrace{\begin{matrix} 2 & 4 \\ -3 & -1 \\ 2 & 2 \end{matrix}}_{M} & \begin{matrix} -1 \\ b+5 \\ 2 \end{matrix} \end{array}\right) \rightarrow$$

Perquè les rectes es tallin, ha de ser $|M'| = 0$ (perquè $ran\,(M) = ran\,(M') = 2$).

$|M'| = 4b + 44 = 0 \rightarrow b = -11$

Per trobar el punt de tall, escrivim les dues rectes en forma paramètrica:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -5 - 3\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4\mu \\ y = -11 - \mu \\ z = 1 + 2\mu \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} 1 + 2\lambda = 4\mu \\ -5 - 3\lambda = -11 - \mu \\ -1 + 2\lambda = 1 + 2\mu \end{array}\right\}$$

Restant la 3a equació a la 1.ª: $2 = -1 + 2\mu$.

$$\mu = \frac{3}{2} \qquad \lambda = \frac{4\mu - 1}{2} = \frac{5}{2}$$

Substituint $\lambda = \frac{5}{2}$ en les equacions de r (o $\mu = \frac{3}{2}$ en les de s), obtenim el punt de tall: $\left(6, \frac{-25}{2}, 4\right)$.

41. **Determina el valor de a perquè les rectes r i s siguin coplanàries:**

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y-a}{1} = \frac{z}{0} \qquad s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

Troba el pla que les conté.

$\vec{d}_r(1, 1, 0)$; $P(0, a, 0)$

$\vec{d}_s(1, -1, 1)$; $P'(1, 1, -1)$

$\overrightarrow{PP'}(1, 1 - a, -1)$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1-a \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Perquè les rectes siguin coplanàries, ha de ser } |M'| = 0.$$

$|M'| = a + 2 = 0 \rightarrow a = -2$

Un vector normal al pla és: $\vec{d}_r \times \vec{d}_s = (1, 1, 0) \times (1, -1, 1) = (1, -1, -2)$.

El pla que les conté és: $1(x-1) - 1(y-1) - 2(z+1) = 0$

$x - y - 2z - 2 = 0$

42. **Es pot construir un triangle que tingui dos dels costats sobre les rectes r i s?**

$$r: \frac{x-1}{2} = y = z + 1 \qquad s: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Estudiem la posició relativa de las rectes:

$\vec{d}_r(2, 1, 1)$; $P(1, 0, -1)$

$\vec{d}_s(2, 1, 1)$

Les dues rectes tenen la mateixa direcció. A més, $P(1, 0, -1) \in r$, però $P \notin s$

$$\text{atès que: } \begin{cases} 2\lambda = 1 \rightarrow \lambda = 1/2 \\ -1 + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Per tant, les rectes són paral·leles. Així doncs, *no* es pot construir un triangle que tingui dos dels seus costats sobre les rectes r i s.

43. **Estudia la posició relativa de la recta: $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ i el pla $\pi: x - y + z - 3 = 0$.**

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

π: $x - y + z - 3 = 0$

$$(3 + 2\lambda) - (-1 + \lambda) + (-\lambda) - 3 = 0$$

$$3 + 2\lambda + 1 - \lambda - \lambda - 3 = 0$$

$$1 = 0$$

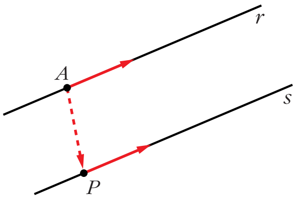
La recta és *paral·lela* al pla (ja que no tenen cap punt en comú).

44. Donada la recta r determinada pels punts $A\,(1, 1, 1)$ i $B\,(3, 1, 2)$, i la recta:

$$s: \begin{cases} x - \quad 2z - 1 = 0 \\ \quad y \quad - 2 = 0 \end{cases}$$

estudia'n la posició relativa i troba, si existeix, l'equació del pla que les conté.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{d}_r = \overrightarrow{AB} = (2, 0, 1);\ \ A(1, 1, 1) \\ \vec{d}_s = (1, 0, -2) \times (0, 1, 0) = (2, 0, 1);\ \ A \notin s \end{array}\right\} \text{ Les rectes són paral·leles.}$$



Obtenim un punt de s fent $z = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \end{array}\right\} P(1, 2, 0)$$

El pla que busquem és paral·lel a $\vec{d}_r$ i a $\overrightarrow{AP}(0, 1, -1)$.

Un vector normal al pla és: $\vec{n} = \vec{d}_r \times \overrightarrow{AP} = (2, 0, 1) \times (0, 1, -1) = (-1, 2, 2)$.

El pla és: $-1 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - 1) + 2 \cdot (z - 1) = 0$

$$-x + 2y + 2z - 3 = 0$$

45. Donada la recta r: $\begin{cases} 3x + ay + \ \ z = 1 \\ 2x + 6y - 2z = 6 \end{cases}$

a) Troba, per a cada valor de a, les equacions paramètriques de r_a.

b) Discuteix l'existència de valors de a perquè la recta r_a estigui inclosa en el pla $x + y + z = 1$.

a) $\left.\begin{array}{l} 3x + \ \ z = 1 - ay \\ 2x - 2z = 6 - 6y \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 3x + z = 1 - ay \\ x - z = 3 - 3y \end{array}\right\}$ Sumant: $4x = 4 - (a + 3)y$

$$x = 1 - \frac{a+3}{4}y$$

$$z = x - 3 + 3y = 1 - \frac{a+3}{4}y - 3 + 3y = -2 + \frac{9-a}{4}y$$

$$r_a: \begin{cases} x = 1 - (a + 3)\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = -2 + (9 - a)\lambda \end{cases}$$

b) $x + y + z = 1$

$1 - (a + 3)\lambda + 4\lambda - 2 + (9 - a)\lambda = 1$

$1 - a\lambda - 3\lambda + 4\lambda - 2 + 9\lambda - a\lambda = 1$

$(10 - 2a)\lambda = 2$

$10 - 2a = 0 \quad \to \quad 10 = 2a \quad \to \quad a = 5$

- Si $a = 5$ → La recta és paral·lela al pla.
- Si $a \neq 5$ → La recta i el pla es tallen en un punt.

Per tant, no existeixen valors de a per als quals la recta estigui continguda en el pla.

Pàgina 159

46. Troba l'equació del pla que passa pels punts $A(1, 3, 2)$ i $B(-2, 5, 0)$ i és paral·lel a la recta $\begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -2 - 3\lambda \end{cases}$

El pla serà paral·lel a $\overrightarrow{AB}(-3, 2, -2)$ i a $\vec{d}(-1, 1, -3)$.

Un vector normal al pla és: $(-3, 2, -2) \times (-1, 1, -3) = (-4, -7, -1) \quad \to \quad \vec{n}(4, 7, 1)$

El pla és: $4(x - 1) + 7(y - 3) + 1(z - 2) = 0$

$4x + 7y + z - 27 = 0$

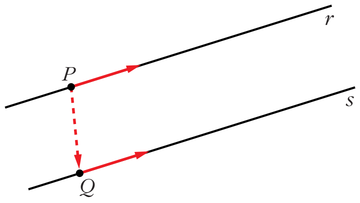
47. Estudia la posició de les rectes següents i troba, si és possible, el pla que les conté:

$r: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2} \qquad s: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+2}{-2}$

$\vec{d}_r(1, -1, 2)$; $P(2, 1, 0)$

$\vec{d}_s(-1, 1, -2)$

Les rectes tenen la mateixa direcció. A més $P(2, 1, 0) \in r$, però $P \notin s$; per tant les rectes són paral·leles.



Un punt de s és $Q(1, 1, -2)$.

El pla que busquem és paral·lel a $\vec{d}_r$ i a $\overrightarrow{PQ}(-1, 0, -2)$.

Un vector normal al pla és:

$\vec{n} = (1, -1, 2) \times (-1, 0, -2) = (2, 0, -1)$

El pla és: $2(x - 2) + 0(y - 1) - 1(z - 0) = 0$

$2x - z - 4 = 0$

48. Troba l'equació del pla que conté la recta

$$r: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{i és paral·lel a: } s: \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$$

El pla serà paral·lel a $\vec{d}_r(3, -1, 1)$ i a $\vec{d}_s(5, 2, -3)$.

Un vector normal al pla serà: $\vec{n} = (3, -1, 1) \times (5, 2, -3) = (1, 14, 11)$.

Un punt del pla és $(2, -1, 0)$.

Per tant, el pla és: $1(x-2) + 14(y+1) + 11(z-0) = 0$

$$x + 14y + 11z + 12 = 0$$

49. Calcula el valor de *m* perquè els punts *A* (*m*, 0, 1), *B* (0, 1, 2), *C* (1, 2, 3) i *D* (7, 2, 1) estiguin en un mateix pla. Quina és l'equació d'aquest pla?

Busquem l'equació del pla que conté *B*, *C* i *D*.

El pla serà paral·lel a $\overrightarrow{BC}(1, 1, 1)$ i a $\overrightarrow{CD}(6, 0, -2)$, és a dir, a (1, 1, 1) i a (3, 0, –1). Un vector normal al pla és:

$$(1, 1, 1) \times (3, 0, -1) = (-1, 4, -3) \rightarrow \vec{n}(1, -4, 3)$$

L'equació del pla és: $1(x-0) - 4(y-1) + 3(z-2) = 0$

$$x - 4y + 3z - 2 = 0$$

Perquè *A* pertanyi al mateix pla, ha de ser:

$$m - 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 2 = 0 \rightarrow m + 1 = 0 \rightarrow m = -1$$

50. Donat el pla π: $2x - 3y + z = 0$ i la recta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$, troba l'equació del pla que conté la recta *r* i que és perpendicular al pla π.

El pla serà paral·lel a (2, –3, 1) i a (1, –1, 2).

Un vector normal al pla és: $(2, -3, 1) \times (1, -1, 2) = (-5, -3, 1) \rightarrow \vec{n}(5, 3, -1)$.

El punt (1, 2, –1) pertany al pla.

L'equació del pla és: $5(x-1) + 3(y-2) - 1(z+1) = 0$

$$5x + 3y - z - 12 = 0$$

51. Estudia la posició dels plans següents:

$$\text{a)} \begin{cases} x + 2y - z - 3 = 0 \\ 3y + 2z - 1 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \\ 3x - y + z - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{c)} \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

a) $$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=3\\ 3y+2z=1\\ x+y+z=2\end{array}\right\}\quad M'=\left(\underbrace{\begin{matrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{matrix}}_{M}\;\middle|\;\begin{matrix}3\\1\\2\end{matrix}\right)$$

$|M| = 8 \;\rightarrow\; ran\,(M) = ran\,(M') = 3 \;\rightarrow$ Els tres plans es tallen en un punt.

b) $$\left.\begin{array}{r} 2x-y+z=3\\ x-y+z=2\\ 3x-y+z=4\end{array}\right\}\quad M'=\left(\underbrace{\begin{matrix}2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{matrix}}_{M}\;\middle|\;\begin{matrix}3\\2\\4\end{matrix}\right)$$

La 3a columna és $-1 \cdot$ 2a; i la 4a columna s'obté sumant la 1a i la 3a.

Per tant $ran\,(M) = ran\,(M') = 2 \;\rightarrow$ Els tres plans es tallen en una recta.

c) $$\left.\begin{array}{r} x-y+z=1\\ 3x+y-2z=0\\ 2x+2y-3z=-4\end{array}\right\}\quad M'=\left(\underbrace{\begin{matrix}1 & -1 & 1\\ 3 & 1 & -2\\ 2 & 2 & -3\end{matrix}}_{M}\;\middle|\;\begin{matrix}1\\0\\-4\end{matrix}\right)$$

$$\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix} = 4 \neq 0 \text{ i } |M| = 0 \;\rightarrow\; ran\,(M) = 2$$

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & 2 & -4\end{vmatrix} = -12 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(M') = 3$$

Els plans es tallen dos a dos, però no hi ha cap punt comú als tres.

52. Escriu l'equació del pla que passa pels punts $A\,(1, -3, 2)$ i $B\,(0, 1, 1)$ i és paral·lel a la recta:

$$r: \begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0\\ 2y + 3z - 3 = 0\end{cases}$$

Un vector direcció de r és: $(3, -2, 0) \times (0, 2, 3) = (-6, -9, 6) \,//\, (2, 3, -2)$

$\overrightarrow{AB}(-1, 4, -1)$

El pla que busquem és paral·lel a $(2, 3, -2)$ i a $(-1, 4, -1)$.

Un vector normal al pla és: $\vec{n} = (2, 3, -2) \times (-1, 4, -1) = (5, 4, 11)$.

L'equació del pla és: $5(x - 0) + 4(y - 1) + 11(z - 1) = 0$

$$5x + 4y + 11z - 15 = 0$$

53. Donats els plans $mx + 2y - 3z - 1 = 0$ i $2x - 4y + 6z + 5 = 0$, troba m perquè siguin:

a) Paral·lels.

b) Perpendiculars.

a) Les coordenades de $(m, 2, -3)$ i de $(2, -4, 6)$ han de ser proporcionals:

$$\frac{m}{2} = \frac{2}{-4} = \frac{-3}{6} \quad \rightarrow \quad m = -1$$

b) $(m, 2, -3) \cdot (2, -4, 6) = 2m - 8 - 18 = 2m - 26 = 0 \quad \rightarrow \quad m = 13$

54. **Troba el valor de a perquè les rectes r i s estiguin en un mateix pla i troba l'equació d'aquest pla:**

$$r: \begin{cases} x \quad - 2z = 0 \\ y - z = 2 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x + y \quad = 1 \\ x \quad + 2z = a \end{cases}$$

Escrivim les equacions de r i s en forma paramètrica:

$$r: \left\{ \begin{array}{l} x \quad - 2z = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2z \\ y - \quad z = 2 \quad \rightarrow \quad y = 2 + z \end{array} \right\} \qquad r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$s: \left\{ \begin{array}{l} x + y \quad = 1 \quad \rightarrow \quad y = 1 - x \\ x \quad + 2z = a \quad \rightarrow \quad z = \dfrac{a}{2} - \dfrac{x}{2} \end{array} \right\} \qquad s: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \dfrac{a}{2} - \lambda \end{cases}$$

Obtenim un punt i un vector direcció de cada recta:

$\vec{d}_r(2, 1, 1)$; $P(0, 2, 0)$

$\vec{d}_s(2, -2, -1)$; $P'(0, 1, a/2)$

$\overrightarrow{PP'}(0, -1, a/2)$

Perquè les rectes estiguin en el mateix pla, els vectors $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ i $\overrightarrow{PP'}$ han de ser coplanaris:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & a/2 \end{vmatrix} = -3a - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad a = \frac{-4}{3}$$

El pla serà paral·lel a $\vec{d}_r$ i a $\vec{d}_s$. Un vector normal al pla és:

$\vec{n} = (2, 1, 1) \times (2, -2, -1) = (1, 4, -6)$

El punt $P(0, 2, 0)$ pertany al pla.

L'equació del pla és: $1(x - 0) + 4(y - 2) - 6(z - 0) = 0$

$x + 4y - 6z - 8 = 0$

55. **Estudia la posició de la recta $r: \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ i el pla $z = 1$.**

Són perpendiculars i es tallen en el punt $(3, 2, 1)$.

56. **Essent la recta** $r: \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ **i el pla** $ax - y + 4z - 2 = 0$.

a) Calcula el valor de a **perquè** r **sigui paral·lela al pla.**

b) Hi ha algun valor de a **per al qual** r **sigui perpendicular al pla?**

Un vector direcció de r és: $\vec{d} = (3, -1, 1) \times (2, 0, -1) = (1, 5, 2)$.

Un vector normal al pla és $\vec{n} = (a, -1, 4)$.

a) Perquè r sigui paral·lela al pla, $\vec{d}$ i $\vec{n}$ han de ser perpendiculars:

$$(1, 5, 2) \cdot (a, -1, 4) = a - 5 + 8 = a + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad a = -3$$

b) Els vectors $\vec{d}$ i $\vec{n}$ haurien de tenir les seves coordenades proporcionals.

Com que $\frac{5}{-1} \neq \frac{2}{4}$, no és possible; és a dir, *no* existeix cap valor de a per al qual r sigui perpendicular al pla.

57. **Donats la recta** $r: \begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$ **i el pla** $\pi: x + 2y + 3z - 1 = 0$, **troba l'equació d'una recta** s **continguda en el pla** π **que passi pel punt** $P(2, 1, -1)$ **i sigui perpendicular a** r.

☛ ***El vector direcció de** s **ha de ser perpendicular al vector direcció de** r **i al vector normal del pla.***

Un vector direcció de r és: $\vec{d} = (1, 0, -2) \times (0, 1, -1) = (2, 1, 1)$.

Un vector normal al pla és $\vec{n} = (1, 2, 3)$.

Un vector direcció de la recta que busquem és: $(2, 1, 1) \times (1, 2, 3) = (1, -5, 3)$.

La recta és: $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 5\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$

58. **Troba l'equació de la recta paral·lela a** $r: \begin{cases} x + 2z = 5 \\ y + 3z = 5 \end{cases}$ **que passi pel punt d'intersecció de la recta** $s: \frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{3}$ **amb el pla** $\pi: x - y + z = 7$.

Un vector direcció de la recta és: $(1, 0, 2) \times (0, 1, 3) = (-2, -3, 1) \,//\, (2, 3, -1)$.

Escrivim la recta s en forma paramètrica per trobar el punt de tall de s i π:

$s: \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases}$

$\pi: x - y + z = 7$

$1 + 4\lambda + 3 - 2\lambda - 2 + 3\lambda = 7$

$5\lambda = 5 \quad \rightarrow \quad \lambda = 1$

El punt de tall de s i π és $(5, -1, 1)$.

Per tant, la recta que busquem és:

$$\begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \text{o bé} \quad \frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

Pàgina 160

59. Troba l'equació de la recta que passa pel punt $P(1, 2, 3)$ i que és perpendicular al pla que passa per l'origen i pels punts $B(1, 1, 1)$ i $C(1, 2, 1)$.

Un vector normal al pla és: $\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} = (1, 1, 1) \times (1, 2, 1) = (-1, 0, 1)$.

Aquest vector és un vector direcció de la recta que busquem.

Les equacions de la recta són:

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

60. Escriu l'equació del pla que conté la recta $r: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$

i és paral·lel a: $s: \dfrac{1-x}{-2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+2}{-4}$.

Un vector direcció de r és: $(1, 1, 0) \times (2, -1, 1) = (1, -1, -3)$.

El pla que busquem és paral·lel a $(1, -1, -3)$ i a $(-2, 3, -4)$. Un vector normal al pla és: $\vec{n} = (1, -1, -3) \times (-2, 3, -4) = (13, 10, 1)$.

Obteneim un punt de r fent $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{lcl} y - 1 = 0 & \to & y = 1 \\ -y + z = 0 & \to & z = y = 1 \end{array}\right\} P(0, 1, 1)$$

L'equació del pla és: $13(x - 0) + 10(y - 1) + 1(z - 1) = 0$

$$13x + 10y + z - 11 = 0$$

61. Estudia les posicions relatives del pla: $\pi: x + ay - z = 1$ i de la recta $r: \begin{cases} 2x + y - az = 2 \\ x - y - z = a - 1 \end{cases}$ segons els valors de a.

$$\left.\begin{array}{ll} \pi: & x + ay - z = 1 \\ r: & \begin{cases} 2x + y - az = 2 \\ x - y - z = a - 1 \end{cases} \end{array}\right\} \quad M' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{matrix}}_{M} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ a - 1 \end{matrix} \right)$$

$$|M| = -a^2 + a + 2 = 0 \quad \to \quad a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} = \left\langle \begin{array}{l} a = -1 \\ a = 2 \end{array} \right.$$

- Si $a = -1$, queda:

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$ plans paral·lels. La recta és paral·lela al pla.

- Si $a = 2$, queda:

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$ La 1a equació s'obté restant a la 2a la 3a.

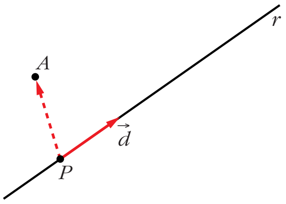
Per tant, la recta està continguda en el pla.

- Si $a \neq -1$ i $a \neq 2$ → La recta i el pla es tallen en un punt.

62. Calcula l'equació del pla que determinen el punt $A(1, 0, 1)$ i la recta:

$$r: \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Un vector direcció de la r és: $\vec{d} = (1, 1, -1) \times (2, -1, 2) = (1, -4, -3)$.



Obtenim un punt de r fent $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{r} y - z + 1 = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Sumant: } z + 1 = 0 \rightarrow z = -1 \\ y = 2z = -2 \end{array}$$

$P(0, -2, -1)$

El pla és paral·lel a $\vec{d}(1, -4, -3)$ i a $\overrightarrow{PA}(1, 2, 2)$.

Un vector normal al pla és: $(1, -4, -3) \times (1, 2, 2) = (-2, -5, 6) // (2, 5, -6)$.

L'equació del pla és: $2(x - 1) + 5(y - 0) - 6(z - 1) = 0$

$2x + 5y - 6z + 4 = 0$

63. Donats els vectors $\vec{u}(2, 3, 5)$, $\vec{v}(6, -3, 2)$, $\vec{w}(4, -6, 3)$, $\vec{p}(8, 0, a)$, i els plans $\pi: (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ i $\pi': (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda\vec{w} + \mu\vec{p}$, estudia la posició relativa de π i π' segons els valors de a.

Obtenim les equacions implícites dels dos plans:

$\vec{u} \times \vec{v} = (21, 26, -24)$

$\pi: 21(x - 1) + 26(y - 2) - 24(z - 3) = 0$

$\pi: 21x + 26y - 24z - 1 = 0$

$\vec{w} \times \vec{p} = (-6a, 24 - 4a, 48)$

$\pi': -6a(x - 1) + (24 - 4a)(y - 2) + 48(z - 3) = 0$

$\pi': -6ax + (24 - 4a)y + 48z + (14a - 192) = 0$

$$M' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 21 & 26 & -24 \\ -6a & 24-4a & 48 \end{matrix}}_{M} \left| \begin{matrix} 1 \\ 192-14a \end{matrix} \right.\right)$$

$$\begin{vmatrix} 21 & -24 \\ -6a & 48 \end{vmatrix} = 1\,008 - 144a = 0 \quad \to \quad a = 7$$

- Si $a = 7$, queda:

  $\left(\begin{array}{ccc|c} 21 & 26 & -24 & 1 \\ -42 & -4 & 48 & 94 \end{array}\right) \to$ Els plans es tallen en una recta.

- Si $a \neq 7 \quad \to \quad ran\,(M) = ran\,(M')$. Els plans es tallen en una recta.

Els plans es tallen en una recta qualsevol que sigui el valor de a (encara que no sigui sempre la mateixa recta).

64. Estudia la posició dels plans següents segons els valors de m:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ my + z = 0 \\ x + (1+m)y + mz = m+1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ my + z = 0 \\ x + (1+m)y + mz = m+1 \end{array}\right\} \quad M' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 1+m & m \end{matrix}}_{M} \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ m+1 \end{matrix} \right.\right)$$

$$|M| = m^2 - m = 0 \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

- Si $m = 0$, queda:

  $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ El 1r i el 3r són el mateix pla; el 2n els talla. Per tant, es tallen en una recta.

- Si $m = 1$, queda:

  $$M' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}}_{M} \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} \right.\right)$$

  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ i } |M| = 0 \quad \to \quad ran\,(M) = 2$$

  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \to \quad ran\,(M') = 3$$

  Els plans es tallen dos a dos, però no hi ha cap punt comú als tres.

- Si $m \neq 0$ i $m \neq 1 \quad \to \quad ran\,(M) = ran\,(M') = 3$. Els plans es tallen en un punt.

65. Troba l'equació de la recta r que quan passa pel punt $P(2, 0, -1)$ talla les rectes:

$$s_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{1} \qquad s_2: \begin{cases} x + y + 4 = 0 \\ y - 3z + 3 = 0 \end{cases}$$

Escrivim les dues rectes en forma paramètrica:

$$s_1: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \qquad s_2: \begin{cases} x = -1 - 3\lambda \\ y = -3 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

La recta r està determinada pels següents plans:

α: conté la recta s_1 i el punt P: $\begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

β: conté la recta s_2 i el punt P: $\begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Així, r: $\begin{cases} x - 2z - 4 = 0 \\ x + 3z + 1 = 0 \end{cases}$

66. Donats els plans: π: $ax + y + z = a$ i π': $x - ay + az = -1$ comprova que es tallen en una recta per a qualsevol valor de a. Obtén el vector director d'aquesta recta en funció de a.

$$\left.\begin{array}{l} \pi: \ ax + \ \ y + \ \ z = a \\ \pi': \ \ x - ay + az = -1 \end{array}\right\} \quad M = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & a \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 - 1 = -(a^2 + 1) \neq 0$ per a tot valor de a.

Per tant, $ran\ (M) = 2$ per a qualsevol valor de a; és a dir, els plans es tallen en una recta (qualsevol que sigui el valor de a).

- Vector direcció de la recta: $(a, 1, 1) \times (1, -a, a) = (2a, 1 - a^2, -a^2 - 1)$.

67. Considera aquestes rectes:

$$r: \begin{cases} x = \ \ 3 + \ \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = \ \ 2 + \ \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 4x + 5y + 7 = 0 \\ 3y - 4z + 7 - m = 0 \end{cases}$$

a) Calcula el valor de m perquè estiguin en un mateix pla.

b) Escriu l'equació d'aquest pla.

a) $\left.\begin{array}{l} \vec{d}_r(1, 2, 1) \\ \vec{d}_s = (4, 5, 0) \times (0, 3, -4) = (-20, 16, 12) \ // \ (-5, 4, 3) \end{array}\right\}$

Com que les rectes no són paral·leles ni coincidents, perquè estiguin en un mateix pla s'han de tallar en un punt. Imposem aquesta condició. Per esbrinar el punt de tall, substituïm les coordenades d'un punt de r en les equacions de s i resolem el sistema:

$$\begin{cases} 4(3+\lambda)+5(-1+2\lambda)+7=0 \rightarrow 14\lambda+14=0 \rightarrow \lambda=-1 \\ 3(-1+2\lambda)-4(2+\lambda)+7-m=0 \rightarrow 2\lambda-4-m=0 \rightarrow -6-m=0 \rightarrow m=-6 \end{cases}$$

Per tant, perquè les rectes estiguin en un mateix pla, ha de ser $m=-6$.

b) Si $m=-6$, les rectes es tallen en el punt $(2, -3, 1)$ (ho obtenim fent $\lambda=-1$ en les equacions de r).

El pla que busquem passarà per aquest punt i serà paral·lel a $\vec{d}_r$ i a $\vec{d}_s$. Per tant, un vector normal al pla serà:

$(1, 2, 1) \times (-5, 4, 3) = (2, -8, 14) \rightarrow \vec{n}(1, -4, 7)$

L'equació del pla és: $1(x-2)-4(y+3)+7(z-1)=0$

$x-4y+7z-21=0$

68. **Donades les rectes** $r: \begin{cases} x-3y+6=0 \\ ax-3z+3=0 \end{cases}$ **i** $s: \begin{cases} x-2ay+4a-1=0 \\ 2y-z-4=0 \end{cases}$**:**

a) Esbrina si hi ha algun valor de a per al qual les rectes estan contingudes en un pla. En cas afirmatiu, calcula l'equació d'aquest pla.

b) Determina, quan es pugui, els valors de a per als quals les rectes són paral·leles i els valors de a per als quals les rectes s'encreuen.

a) Obtenim un vector direcció de cada una de les rectes:

$\vec{d}_r$: $(1, -3, 0) \times (a, 0, -3) = (9, 3, 3a) \parallel (3, 1, a) = \vec{d}_r$

$\vec{d}_s$: $(1, -2a, 0) \times (0, 2, -1) = (2a, 1, 2) = \vec{d}_s$

Les coordenades dels dos vectors no són proporcionals per a cap valor de a; per tant, les rectes no són paral·leles ni coincidents. Perquè estiguin en un mateix pla, s'han de tallar en un punt.

Obtenim un punt de cada una de les rectes:

r: $x=0 \rightarrow y=2,\ z=1 \rightarrow P(0, 2, 1)$

s: $y=0 \rightarrow z=-4,\ x=1-4a \rightarrow P'(1-4a, 0, -4)$

$\overrightarrow{PP'}(1-4a, -2, -5)$

Perquè les rectes es tallin, els vectors $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ i $\overrightarrow{PP'}$ han de ser coplanaris:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & a \\ 2a & 1 & 2 \\ 1-4a & -2 & -5 \end{vmatrix} = a-1=0 \rightarrow a=1$$

Si $a=1$, les rectes són secants, i, per tant, estan contingudes en un pla.

El pla serà paral·lel a (3, 1, 1) i a (2, 1, 2). Un vector normal al pla serà:

$$\vec{n} = (3, 1, 1) \times (2, 1, 2) = (1, -4, 1)$$

Un punt del pla és, per exemple, $P(0, 2, 1)$. Així, l'equació del pla és:

$$1(x - 0) - 4(y - 2) + 1(z - 1) = 0$$

$$x - 4y + z + 7 = 0$$

b) Pel que hem obtingut en l'apartat anterior, sabem que:

- No hi ha cap valor de a per al qual les rectes siguin paral·leles.
- Si $a \neq 1$, les rectes es creuen.

QÜESTIONS TEÒRIQUES

69. Demostra que l'equació del pla que talla els eixos de coordenades en els punts $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ i $C(0, 0, c)$ essent a, b i c no nuls, es pot escriure així:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

- Si substituïm les coordenades dels punts A, B i C en l'equació donada, veiem que la compleixen.
- D'altra banda, per veure els punts de tall amb els eixos de coordenades del pla donat, fem això:

— tall amb l'eix $X \rightarrow y = z = 0 \rightarrow x = a \rightarrow A(a, 0, 0)$

— tall amb l'eix $Y \rightarrow x = z = 0 \rightarrow y = b \rightarrow B(0, b, 0)$

— tall amb l'eix $Z \rightarrow x = y = 0 \rightarrow z = c \rightarrow C(0, 0, c)$

70. Un pla queda determinat per un punt A i dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Quina condició han de complir aquests dos vectors?

Tenir diferent direcció.

71. Explica com s'obtenen les equacions paramètriques d'un pla del qual se'n coneix l'equació implícita. Aplica-ho al pla $x + 2y - z - 1 = 0$.

Fem, per exemple, $y = \lambda$, $z = \mu$ i aïllem x.

En el cas del pla $x + 2y - z - 1 = 0$, quedaria: $x = 1 - 2y + z$; és a dir:

$$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$ són les seves equacions paramètriques.

Pàgina 161

72. Quines són les equacions implícites de la recta $\frac{x-4}{0} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-1}{2}$?

$$\begin{cases} x - 4 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$$

73. Quina posició relativa han de tenir dues rectes perquè determinin un pla?

Paral·leles o secants.

74. Siguin π_1 i π_2 dos plans paral·lels i r_1 i r_2 dues rectes contingudes en π_1 i π_2, respectivament. Podem assegurar que r_1 i r_2 són paral·leles?

No. Poden ser paral·leles o encreuar-se.

75. Les rectes r i s s'encreuen. Si trobem el pla que conté r i és paral·lel a s, i el pla que conté s i és paral·lel a r, com són entre si aquests plans?

Paral·lels.

76. Siguin $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$ dos punts del pla $ax + by + cz + d = 0$. Prova analíticament que el vector $\vec{AB}$ és perpendicular al vector $\vec{n}(a, b, c)$.

☛ ***Substitueix les coordenades de A i de B en l'equació del pla i resta'n les igualtats que n'obtens.***

$$\left.\begin{array}{l} A \in \pi \;\rightarrow\; ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ B \in \pi \;\rightarrow\; ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \end{array}\right\}$$

Restant, obtenim:

$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0$; és a dir:

$(a, b, c) \cdot \vec{AB} = 0 \;\rightarrow\; \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$

Per tant, $\vec{AB}$ és perpendicular a $\vec{n}$.

77. Donats una recta $r: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ i un pla $a''x + b''y + c''z + d'' = 0$, què significa geomètricament que el sistema que s'obté ajuntant les equacions de la recta i el pla sigui incompatible? I si és compatible indeterminat?

Si el sistema és incompatible, significa que la recta i el pla són paral·lels. Si és compatible indeterminat, significa que la recta està continguda en el pla.

78. **Indica quina condició han de complir a, b, c i d perquè el pla $ax + by + cz + d = 0$ sigui:**

a) Paral·lel al pla *OXY*.

b) Perpendicular al pla *OXY*.

c) Paral·lel a l'eix *Z*.

d) No sigui paral·lel a cap dels eixos.

a) $a = b = 0, \quad c \neq 0, \quad d \neq 0$

b) $c = 0$

c) $c = 0, \quad d \neq 0$

d) $a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0$

PER APROFUNDIR

79. **Donats el pla $\pi: ax + y + z + 1 = 0$ i les rectes:**

$$r_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = 2 \\ y = 2z \end{cases} \qquad r_3: \begin{cases} x = 3 \\ y = 3z \end{cases}$$

Calcula el valor de a perquè els punts de tall del pla amb cada una de les rectes estiguin alineats.

☛ ***Troba, en funció de a, els punts de tall P, Q i R. Expressa després la dependència lineal entre els vectors $\vec{PQ}$ i $\vec{QR}$.***

Busquem els punts de tall del pla amb cada una de les tres rectes:

π amb r_1: $\quad a + 2z + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad z = \dfrac{-1-a}{2}$

$$P\left(1, \frac{-1-a}{2}, \frac{-1-a}{2}\right)$$

π amb r_2: $\quad 2a + 3z + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad z = \dfrac{-1-2a}{3}$

$$Q\left(2, \frac{-2-4a}{3}, \frac{-1-2a}{3}\right)$$

π amb r_3: $\quad 3a + 4z + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad z = \dfrac{-1-3a}{4}$

$$R\left(3, \frac{-3-9a}{4}, \frac{-1-3a}{4}\right)$$

Els vectors $\vec{PQ}$ i $\vec{QR}$ han de tenir les seves coordenades proporcionals:

$$\vec{PQ}\left(1, \frac{-1-5a}{6}, \frac{1-a}{6}\right); \quad \vec{QR}\left(1, \frac{-1-11a}{12}, \frac{1-a}{12}\right)$$

$$\frac{-1-5a}{6} = \frac{-1-11a}{12} \;\rightarrow\; -2-10a = -1-11a \;\rightarrow\; a = 1$$

$$\frac{1-a}{6} = \frac{1-a}{12} \;\rightarrow\; a = 1$$

Per tant, $a = 1$.

80. **Troba l'equació de la recta que passa per $A(1, 1, 1)$, és paral·lela al pla $\pi: x - y + z - 3 = 0$ i talla la recta $s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$**

- Com que talla s, passarà pel punt $P(1, 3, K)$ per a un valor concret de K.
- Com que passa per $A(1, 1, 1)$ i per $P(1, 3, K)$, un vector direcció és: $\overrightarrow{AP}(0, 2, K-1)$.
- Com que ha de ser paral·lel al pla π, serà perpendicular al vector normal de π, $\vec{n}(1, -1, 1)$. Per tant:

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = -2 + K - 1 = 0 \;\rightarrow\; K = 3, \text{ és a dir: } \overrightarrow{AP}(0, 2, 2) \,//\, (0, 1, 1)$$

- Les equacions de la recta són:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

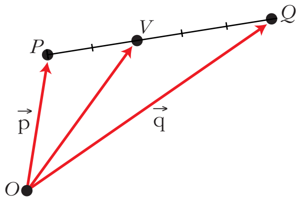
PER PENSAR UNA MICA MÉS

81. **Punts interiors en un segment**

Dividim el segment PQ en cinc parts iguals i situem el punt V a dues unitats de P i tres de Q. Quines són les coordenades de V? Per trobar-les procedim així:

Anomenem $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{q} = \overrightarrow{OQ}$

$$\overrightarrow{OV} = \vec{p} + \frac{2}{5}\overrightarrow{PQ} = \vec{p} + \frac{2}{5}(\vec{q} - \vec{p}) = \frac{3}{5}\vec{p} + \frac{2}{5}\vec{q}$$



a) Si $P(4, -1, 8)$ i $Q(-1, 9, 8)$, troba les coordenades de V.

b) Obtén les coordenades d'un punt W situat en el segment PQ de la manera següent: es divideix el segment en 7 parts iguals i situem W a 2 de P. Aplica-ho a $P(2, 11, -15)$, $Q(9, -3, 6)$.

c) Demostra que si dividim el segment PQ en $m + n$ parts i situem X a m unitats de P, les coordenades de X són:

$$\frac{n}{m+n}\vec{p} + \frac{m}{m+n}\vec{q}$$

d) Demostra que si $0 \leq \alpha < 1$, aleshores $(1 - \alpha)\vec{p} + \alpha\vec{q}$ és un punt de $\overline{PQ}$.

a) $V = \frac{3}{5}(4, -1, 8) + \frac{2}{5}(-1, 9, 8) = (2, 3, 8)$

b) Raonant com en el cas anterior, arribem a:

$$\overrightarrow{OW} = \vec{p} + \frac{2}{7}\overrightarrow{PQ} = \vec{p} + \frac{2}{7}(\vec{q} - \vec{p}) = \frac{5}{7}\vec{p} + \frac{2}{7}\vec{q}$$

Si considerem el cas $P(2, 11, -15)$ i $Q(9, -3, 6)$, aleshores:

$$W = \frac{5}{7}(2, 11, -15) + \frac{2}{7}(9, -3, 6) = (4, 7, -9)$$

c) Raonant com en els casos anteriors, veiem que:

$$\overrightarrow{OX} = \vec{p} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{PQ} = \vec{p} + \frac{m}{m+n}(\vec{q} - \vec{p}) =$$

$$= \left(1 - \frac{m}{m+n}\right)\vec{p} + \frac{m}{m+n}\vec{q} = \frac{n}{m+n}\vec{p} + \frac{m}{m+n}\vec{q}$$

d) Anomenem $d = |\overrightarrow{PQ}|$. Considerem X un punt del segment PQ que és a una distància αd de P i $(1 - \alpha)d$ de Q. (Com que $0 \leq \alpha < 1$, aleshores $0 \leq \alpha d < d$; per tant X pertany al segment PQ).

Raonant com en els apartats anteriors, tenim que les coordenades de X són:

$$\frac{(1-\alpha)d}{d}\vec{p} + \frac{\alpha d}{d}\vec{q}, \text{ és a dir, } (1 - \alpha)\vec{p} + \alpha\vec{q}$$

Per tant, aquest punt (que és X) és un punt del segment PQ.