UNITAT 7 PROBLEMES MÈTRICS

Pàgina 162

Diagonal d'un ortoedre

- **Troba la diagonal dels ortoedres les dimensions dels quals són les següents:**

  a) $\boldsymbol{a = 2, \quad b = 1, \quad c = 2}$

  b) $\boldsymbol{a = 4, \quad b = 12, \quad c = 3}$

  c) $\boldsymbol{a = 7, \quad b = 4, \quad c = 5}$

  a) 3; b) 13; c) $\sqrt{90}$

- **Troba la distància de** $\boldsymbol{P(1, 3, 6)}$ **a** $\boldsymbol{Q(5, 5, 7)}$

  $\sqrt{21}$

Pàgina 163

Distància d'un punt a una recta

- **Seguint el procés anterior, troba la distància del punt** $\boldsymbol{P(8, 6, 12)}$ **a la recta** $\boldsymbol{r}$**:**

$$r: \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - \lambda \\ z = 7 + 2\lambda \end{cases}$$

- Equació del pla π que conté P i és perpendicular a r:

  $0 \cdot (x - 8) - 1 \cdot (y - 6) + 2 \cdot (z - 12) = 0$; és a dir, $\pi: -y + 2z - 18 = 0$

- Punt, Q, de tall de r i π:

  $-(1 - \lambda) + 2(7 + 2\lambda) - 18 = 0$

  $-1 + \lambda + 14 + 4\lambda - 18 = 0$

  $5\lambda - 5 = 0 \quad \to \quad \lambda = 1$

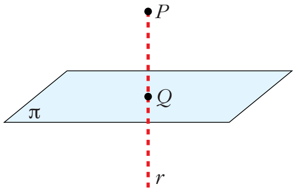
  El punt és $Q(2, 0, 9)$.

- Calculem la distància:

  $dist\,(P, r) = dist\,(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(-6, -6, -3)| = \sqrt{36 + 36 + 9} = \sqrt{81} = 9$

Distància d'un punt a un pla

- **Troba, pas a pas, la distància del punt $P(4, 35, 70)$ al pla π: $5y + 12z - 1 = 0$.**



— Busquem l'equació de la recta, r, que passa per P i és perpendicular a π.

— Obtenim el punt, Q, d'intersecció de r i π.

— La distància de P a π és igual a la distància entre P i Q.

Per al punt i el pla donats:

- Recta, r, que passa per P i és perpendicular a π:

$$r: \begin{cases} x = 4 \\ y = 35 + 5\lambda \\ z = 70 + 12\lambda \end{cases}$$

- Punt, Q, d'intersecció de r i π:

$$5(35 + 5\lambda) + 12(70 + 12\lambda) - 1 = 0$$

$$175 + 25\lambda + 840 + 144\lambda - 1 = 0$$

$$169\lambda + 1\,014 = 0 \quad \to \quad \lambda = -6$$

El punt és $Q(4, 5, -2)$.

- Calculem la distància:

$$dist\,(P, \pi) = dist\,(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(0, -30, -72)| = \sqrt{900 + 5\,184} = \sqrt{6\,084} = 78$$

- **Troba les distàncies del punt $P(1, 2, 4)$ als plans XY, XZ i YZ.**

Equació del pla XY → $z = 0$ dist. = 4

Equació del pla XZ → $y = 0$ dist. = 2

Equació del pla YZ → $x = 0$ dist. = 1

Pàgina 164

1. Troba les equacions paramètriques de la recta que passa per $(1, 0, 7)$ i és perpendicular al pla $5x - 3z + 4 = 0$.

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 0 \\ z = 7 - 3\lambda \end{cases}$$

2. Troba l'equació implícita del pla que passa per $(1, -3, 5)$ i és perpendicular a la recta:

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y+7}{-6} = \frac{z}{1}$$

$5x - 6y + z = 28$

3. **Troba l'equació del pla paral·lel a $5x - y + 4 = 0$ que passa per (1, 0, –3).**

$5(x - 1) - 1(y - 0) + 0(z + 3) = 0$; és a dir: $5x - y - 5 = 0$

4. **Troba l'equació del pla perpendicular a la recta r que passa per (5, –7, –2)**

$$r: \begin{cases} x = -3 + 5\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = -4 + 6\lambda \end{cases}$$

Pàgina 165

5. **Troba l'equació del pla π que conté r i és paral·lel a s:**

$$r: \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4 + 3\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 5 + 4\lambda \end{cases}$$

El pla passa per (5, –1, 8) i és paral·lel a (1, 0, 2) i a (3, –1, 4). Un vector normal al pla és: $(1, 0, 2) \times (3, -1, 4) = (2, 2, -1)$.

L'equació del pla és: $2(x - 5) + 2(y + 1) - 1(z - 8) = 0$; és a dir: $2x + 2y - z = 0$.

6. **Troba les equacions paramètriques de la recta paral·lela a r que passa per $P(0, -1, -3)$:**

$$r: \begin{cases} 3x - 5y + 7z - 4 = 0 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

Un vector direcció de la recta és: $(3, -5, 7) \times (1, -2, 1) = (9, 4, -1)$.

Les equacions paramètriques són: $\begin{cases} x = 9\lambda \\ y = -1 + 4\lambda \\ z = -3 - \lambda \end{cases}$

Pàgina 167

7. **Troba l'angle entre les rectes r i s:**

$$r: \begin{cases} x = 3 - 5\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = -1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{cases}$$

$\vec{V}_r = (-5, 3, 0)$ $\quad \vec{V}_s = (1, -2, 3) \times (2, -1, 4) \rightarrow V_s = (-5, 2, 3)$

$$\cos\alpha = \frac{(-5)\cdot(-5) + 3\cdot 2 + 0\cdot 3}{\sqrt{(-5)^2 + 3^2 + 0^2}\ \sqrt{(-5)^2 + 2^2 + 3^2}} \rightarrow \cos\alpha = \frac{31}{\sqrt{34}\sqrt{38}} \simeq 0{,}85131$$

$$\alpha = 31{,}65° = 31°\ 38'\ 42''$$

8. Calcula l'angle que forma la recta $\dfrac{x-3}{7} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$ amb el pla $x + 3y - z + 1 = 0$.

Anomenem $90° - \alpha$ l'angle format per les direccions de $\vec{d}$ i $\vec{n}$ sense tenir en compte els seus sentits.

$$\vec{d}(7, -1, 3) \,//\, r \qquad \vec{n}(1, 3, -1) \perp \pi$$

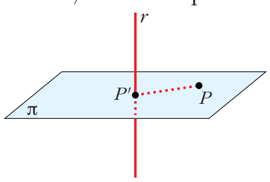
$$\cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|7 - 3 - 3|}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{649}} \approx 0{,}039$$

$$90° - \alpha = 87°\ 45'\ 1'' \quad \to \quad \alpha = 2°\ 14'\ 59''$$

Pàgina 169

9. Troba raonadament la distància de $P(5, 6, 6)$ a la recta $r: (5\lambda, 2 - \lambda, \lambda)$.
Fes-ho per cada un dels tres mètodes que hem après.

- Solució, obtenint prèviament el punt P':



• Pla, π, que passa per P i és perpendicular a r:

$$5(x - 5) - 1(y - 6) + 1(z - 6) = 0$$

és a dir: $\pi: 5x - y + z - 25 = 0$.

• Intersecció, P', de π i r:

$$5(5\lambda) - (2 - \lambda) + \lambda - 25 = 0$$

$$25\lambda - 2 + \lambda + \lambda - 25 = 0$$

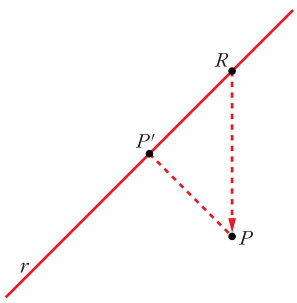
$$27\lambda - 27 = 0 \quad \to \quad \lambda = 1$$

El punt és $P'(5, 1, 1)$.

• Distància entre P i r:

$$dist(P, r) = dist(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = |(0, -5, -5)| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$$

- Segon mètode:



$R(5\lambda, 2 - \lambda, \lambda)$ és un punt genèric de la recta r.

El vector $\overrightarrow{RP}(5 - 5\lambda, 4 + \lambda, 6 - \lambda)$ és variable.

El vector que ens interessa és perpendicular a la recta. Per tant, compleix:

$$(5, -1, 1) \cdot \overrightarrow{RP} = 0; \text{ és a dir:}$$

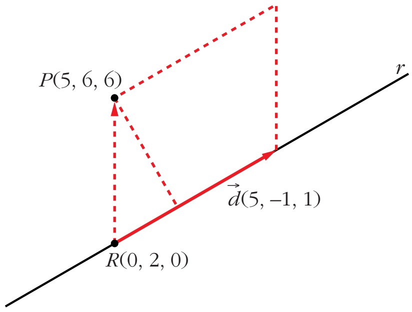
$$5(5 - 5\lambda) - 1(4 + \lambda) + 1(6 - \lambda) = 0$$

$$25 - 25\lambda - 4 - \lambda + 6 - \lambda = 0$$

$$-27\lambda + 27 = 0 \quad \to \quad \lambda = 1$$

La resta, és igual que amb el mètode anterior.

■ Solució directa a partir del producte vectorial:



$$dist\,(P,\ r) = \frac{\text{Àrea}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{RP} \times \vec{d}\,|}{|\vec{d}\,|}$$

$$\overrightarrow{RP} \times \vec{d} = (5,\ 4,\ 6) \times (5,\ -1,\ 1) = (10,\ 25,\ -25)$$

$$|\overrightarrow{RP} \times \vec{d}\,| = \sqrt{100 + 625 + 625} = \sqrt{1\,350}$$

$$|\vec{d}\,| = \sqrt{25 + 1 + 1} = \sqrt{27}$$

$$dist\,(P,\ r) = \frac{\sqrt{1\,350}}{\sqrt{27}} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$$

Pàgina 170

10. Troba la distància del punt $P(8,\ 5,\ -6)$ al pla $\pi: x + 2y - 2z + 3 = 0$.

$$dist\,(P,\ \pi) = \frac{|8 + 10 + 12 + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{33}{3} = 11\text{u}$$

11. Troba la distància dels punts $Q(3,\ 0,\ 3)$ i $R(0,\ 0,\ 0)$ al pla de l'exercici anterior.

$$dist\,(Q,\ \pi) = \frac{|3 - 6 + 3|}{3} = 0 \quad (Q \in \pi) \qquad\qquad dist\,(R,\ \pi) = \frac{3}{3} = 1$$

Pàgina 171

12. Calcula la distància entre la recta i el pla:

$$r: (1 - 3\lambda,\ 2 + \lambda,\ 1 - \lambda) \qquad \pi: x + 3y = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{d}(-3,\ 1,\ -1)\ //\ r \\ \vec{n}(1,\ 3,\ 0) \perp \pi \end{array}\right\} \quad \vec{d} \cdot \vec{n} = -3 + 3 = 0 \ \Rightarrow\ \vec{d} \perp \vec{n} \ \Rightarrow\ r\ //\ \pi$$

Atès que la recta és paral·lela al pla (o, potser, està continguda en ell), la distància de r a π s'obté calculant la distància de qualsevol punt de r a π:

$$dist\,(r,\ \pi) = dist\,[(1,\ 2,\ 1),\ \pi] = \frac{|1 + 6|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{7}{\sqrt{10}} \approx 2{,}21$$

13. Calcula la distància entre els plans: $\pi: y - 5z + 4 = 0$ i $\pi': 2y - 10z = 0$.

Els plans són paral·lels, ja que els seus coeficients són proporcionals. Per tant, la distància entre ells és la distància d'un punt qualsevol d'un d'ells a l'altre:

$P(0,\ 5,\ 1)$ és un punt de π'. Per tant:

$$dist\,(\pi,\ \pi') = dist\,(P,\ \pi) = \frac{|5 - 5 + 4|}{\sqrt{1 + 25}} = \frac{4}{\sqrt{26}} \approx 0{,}78$$

Pàgina 173

14. Calcula la distància entre les dues rectes donades mitjançant cada un dels tres mètodes apresos:

$$r: \begin{cases} x = 13 + 12\lambda \\ y = 2 \\ z = 8 + 5\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 + \mu \\ z = -9 \end{cases}$$

- Primer mètode:

Busquem el pla, π, que conté r i és paral·lel a s:

$$\left.\begin{array}{l} (12, 0, 5) \,//\, r \\ (0, 1, 0) \,//\, s \end{array}\right\} (12, 0, 5) \times (0, 1, 0) = (-5, 0, 12) \perp \pi$$

El punt (13, 2, 8) és de r, i, per tant, de π.

Equació de π: $-5(x-13) + 0(y-2) + 12(z-8) = 0$, és a dir:

$-5x + 12z - 31 = 0$

$$dist\,(r, s) = dist\,(s, \pi) = dist\,[(6, 6, -9), \pi] = \frac{|-30 - 108 - 31|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{169}{13} = 13$$

- Segon mètode:

Punt genèric de r: $R(13 + 12\lambda, 2, 8 + 5\lambda)$.

Punt genèric de s: $S(6, 6 + \mu, -9)$.

Un vector genèric que tingui el seu origen en r i el seu extrem en s és:

$$\overrightarrow{RS} = (-7 - 12\lambda, 4 + \mu, -17 - 5\lambda)$$

De tots els possibles vectors $\overrightarrow{RS}$, busquem aquell que sigui perpendicular a les dues rectes:

$$\begin{cases} \overrightarrow{RS} \cdot (12, 0, 5) = 0 \;\rightarrow\; -169\lambda - 169 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = -1 \\ \overrightarrow{RS} \cdot (0, 1, 0) = 0 \;\rightarrow\; 4 + \mu = 0 \;\rightarrow\; \mu = -4 \end{cases}$$

Substituint en r i en s, obtenim els punts R i S: $R(1, 2, 3)$, $S(6, 2, -9)$.

$$dist\,(r, s) = dist\,(R, S) = |(5, 0, -12)| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

- Tercer mètode:

$$dist\,(r, s) = \frac{\text{Volum del paral·lelepípede}}{\text{Àrea de la base}} = \frac{|[\overrightarrow{RS}, \vec{d}, \vec{d'}]|}{|\vec{d} \times \vec{d'}|}$$

$R(13, 2, 8)$ $\quad \vec{d}(12, 0, 5)$

$S(6, 6, -9)$ $\quad \vec{d'}(0, 1, 0)$

$\overrightarrow{RS}(-7, 4, -17)$

$$[\overrightarrow{RS}, \vec{d}, \vec{d'}] = \begin{vmatrix} -7 & 4 & -17 \\ 12 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -169 \;\rightarrow\; \text{Volum} = 169$$

$$|\vec{d} \times \vec{d'}| = |(-5, 0, 12)| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

Per tant: $dist\,(r, s) = \dfrac{169}{13} = 13.$

15. Calcula la distància entre les dues rectes donades mitjançant tres mètodes diferents:

$$r: \begin{cases} x = 5\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 5 + 7\mu \\ y = 1 - 5\mu \\ z = 1 - 5\mu \end{cases}$$

- Primer mètode:

Busquem el pla, π, que conté r i és paral·lel a s:

$$\left.\begin{array}{l} (5, -1, 1) \,//\, r \\ (7, -5, -5) \,//\, s \end{array}\right\} (5, -1, 1) \times (7, -5, -5) = (10, 32, -18) \,//\, (5, 16, -9) \perp \pi$$

El punt $(0, 2, 0)$ és de r, i, per tant, de π.

Equació de π: $5(x - 0) + 16(y - 2) - 9(z - 0) = 0$, és a dir:

$5x + 16y - 9z - 32 = 0$

$$dist\,(r, s) = dist\,(s, \pi) = dist\,[(5, 1, 1), \pi] = \frac{|25 + 16 - 9 - 32|}{\sqrt{25 + 256 + 81}} = 0$$

(Les rectes r i s es tallen.)

- Segon mètode:

Punt genèric de r: $R(5\lambda, 2 - \lambda, \lambda)$.

Punt genèric de s: $S(5 + 7\mu, 1 - 5\mu, 1 - 5\mu)$.

Un vector genèric que tingui el seu origen en r i el seu extrem en s és:

$$\overrightarrow{RS} = (5 + 7\mu - 5\lambda, -1 - 5\mu + \lambda, 1 - 5\mu - \lambda)$$

De tots els possibles vectors $\overrightarrow{RS}$, busquem aquell que sigui perpendicular a les dues rectes:

$$\begin{cases} \overrightarrow{RS} \cdot (5, -1, 1) = 0 \;\rightarrow\; 27 + 35\mu - 27\lambda = 0 \;\rightarrow\; \mu = 0 \\ \overrightarrow{RS} \cdot (7, -5, -5) = 0 \;\rightarrow\; 35 + 99\mu - 35\lambda = 0 \;\rightarrow\; \lambda = 1 \end{cases}$$

Substituint en r i en s, obtenim els punts R i S: $R(5, 1, 1)$, $S(5, 1, 1)$.

$$dist\,(r, s) = dist\,(R, S) = 0$$

- Tercer mètode:

$$dist\,(r,\ s) = \frac{\text{Volum del paral·lelepípede}}{\text{Àrea de la base}} = \frac{|[\overrightarrow{RS},\ \vec{d},\ \vec{d}']|}{|\vec{d} \times \vec{d}'|}$$

$R(0,\ 2,\ 0)$ $\quad \vec{d}(5,\ -1,\ 1)$

$S(5,\ 1,\ 1)$ $\quad \vec{d}'(7,\ -5,\ -5)$

$\overrightarrow{RS}(5,\ -1,\ 1)$

$$[\overrightarrow{RS},\ \vec{d},\ \vec{d}'] = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 0 \text{ (les dues primeres files són iguals).}$$

Per tant: $dist\,(r,\ s) = 0$

Pàgina 175

16. Calcula l'àrea del triangle que té els vèrtexs en aquests punts: $A\,(1,\ 3,\ 5)$, $B\,(2,\ 5,\ 8)$ i $C\,(5,\ 1,\ -11)$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}(1,\ 2,\ 3) \\ \overrightarrow{AC}(4,\ -2,\ -16) \end{array}\right\}\ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-26,\ 28,\ -10)$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{26^2 + 28^2 + 10^2} = \sqrt{1\,560}$$

$$\text{Àrea del triangle} = \frac{\sqrt{1\,560}}{2} \approx 19{,}75 \text{ u}^2$$

17. Calcula el volum d'un tetràedre els vèrtexs del qual són $A\,(2,\ 1,\ 4)$, $B\,(1,\ 0,\ 2)$, $C\,(4,\ 3,\ 2)$ i $D\,(1,\ 5,\ 6)$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}(-1,\ -1,\ -2) \\ \overrightarrow{AC}(2,\ 2,\ -2) \\ \overrightarrow{AD}(-1,\ 4,\ 2) \end{array}\right\}\ [\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -30$$

$$\text{Volum} = \frac{30}{6} = 5 \text{ u}^3$$

Pàgina 176

18. Troba el L.G. dels punts que equidisten de:

a) $A(4,\ -1,\ 7)$ i $B(-2,\ 5,\ 1)$

b) $\pi\!: x + y + z - 2 = 0$ i $\pi'\!: x - y + z - 2 = 0$

c) $\pi\!: x - 3y + 2z - 8 = 0$ i $\pi'\!: x - 3y + 2z = 0$

a) $-x + y - z + 3 = 0$

b) $\sigma\!: y = 0$ i $\sigma'\!: x + z = 2$

c) $\sigma\!: 2x - 6y + 4z - 8 = 0$

Només un pla, ja que π i π' són paral·lels.

Pàgina 177

19. **Esbrina si $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 10y + 25 = 0$ correspon a l'equació d'una esfera, i troba'n el centre i el radi.**

El radi val 1 i el centre és el punt $(-1, 5, 0)$

20. **Troba el radi de la circumferència en què el pla $4x - 3z - 33 = 0$ talla l'esfera $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 + z^2 = 169$.**

La distància del centre $(2, -5, 0)$ al pla és 5, per tant $\sqrt{13^2 - 5^2}$. El radi de la circumferència és 12.

21. **Troba el lloc geomètric dels punts de l'espai la suma de quadrats de distàncies a $O(0, 0, 0)$ i $Q(10, 0, 0)$ del qual és 68.**

Comprova que es tracta d'una esfera de centre $(5, 0, 0)$ i radi 3.

$x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 16 = 0$

EXERCICIS I PROBLEMES PROPOSATS

PER PRACTICAR

22. **Troba l'angle que formen les rectes r i s en cada cas. Comprova, prèviament, que les rectes es tallen.**

a) $r: \begin{cases} x = 5 - 2\lambda \\ y = 4 + 3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = 5 - \lambda \\ y = 4 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

b) $r: \begin{cases} x - y = 3 \\ -y + z = 15 \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 15 + 5\lambda \end{cases}$

a) r i s es tallen en $(5, 4, 0)$. Es veu a les fórmules:

$$\cos\alpha = \frac{15}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{27}} \qquad \cos\alpha \simeq 0{,}7 \qquad \alpha \simeq 45° \, 33' \, 42''$$

b) r i s es tallen en $(3, 0, 15)$ $\quad \vec{V}_r = (1, -1, 0) \times (0, -1, 1) = (-1, -1, -1)$

$$\cos\alpha = \frac{1 - 101}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{38}} \qquad \cos\alpha \simeq 0{,}93659 \qquad \alpha \simeq 20° \, 30' \, 51''$$

23. **Troba el valor de m per tal que r i s formin un angle de 90°.**

$r: \begin{cases} x = 2 - 5\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = m\lambda \end{cases}$

$V_r \cdot V_s = 0 \qquad (-5, 1, -1)\cdot(1, 2, m) = 0 \qquad -5 + 2 - m = 0 \qquad m = -3$

24. **Troba, en cada cas, l'angle que formen la recta i el pla:**

a) $r: \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{z}{2}$ $\qquad \pi: x - 2y - z + 1 = 0$

b) $r: x = \lambda,\ y = 1 + 2\lambda,\ z = -2$ $\qquad \pi: 2x - y + z = 0$

c) $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{1}$ $\qquad \pi: x + z = 17$

a) $\vec{d}(-2, 4, 2)$; $\vec{n}(1, -2, -1)$

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}||\vec{n}|} = \frac{|-2-8-2|}{\sqrt{24} \cdot \sqrt{6}} = \frac{12}{12} = 1 \;\rightarrow\; 90° - \alpha = 0 \;\rightarrow\; \alpha = 90°$$

Observació: Els vectors $\vec{d}$ i $\vec{n}$ tenen la mateixa direcció; per tant la recta i el pla són perpendiculars, és a dir, $\alpha = 90°$.

b) $\vec{d}(1, 2, 0)$; $\vec{n}(2, -1, 1)$

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}||\vec{n}|} = \frac{|2-2+0|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}} = 0 \;\rightarrow\; 90° - \alpha = 90° \;\rightarrow\; \alpha = 0°$$

c) $\vec{d}(2, 1, 1)$; $\vec{n}(1, 0, 1)$

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}||\vec{n}|} = \frac{|2+1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 90° - \alpha = 30° \;\rightarrow\; \alpha = 60°$$

25. **Calcula l'angle que formen els plans $\alpha: z = 3$ i $\beta: x - y + 2z + 4 = 0$.**

$\vec{n}_\alpha(0, 0, 1)$; $\vec{n}_\beta(1, -1, 2)$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|} = \frac{2}{1\sqrt{6}} = 0{,}816 \;\rightarrow\; \alpha = 35°\ 15'\ 52''$$

26. **Troba els tres angles de cada un dels triangles de vèrtexs:**

a) $A(0, 0, 0)$, $B(1, 2, 1)$, $C(3, 1, 1)$

b) $A(2, 7, 3)$, $B(1, 2, 5)$, $C(-1, -2, 5)$

a) $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 1)$

$\overrightarrow{AC} = (3, 1, 1)$

$\overrightarrow{BC} = (2, -1, 0)$

$$\hat{A} = \text{arc cos}\ \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}\ \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2}} = 42°\ 23'\ 31''$$

$\hat{B} = 47°\ 36'\ 29''$

$\hat{C} = 90°$

b) $\overrightarrow{AB} = (-1, -5, 2)$ $\hat{A} = 11° \ 42' \ 63''$

$\overrightarrow{AC} = (-3, -9, 2)$ $\hat{B} = 153° \ 54' \ 56''$

$\overrightarrow{BC} = (-2, -4, 0)$ $\hat{C} = 14° \ 22' \ 56''$

27. Calcula l'angle que forma el pla π: $x - 2y + z = 0$ amb cada un dels eixos coordenats.

Angle π – eix $x = \alpha_{\pi x}$ $\sin \alpha_{\pi x} = \dfrac{1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 0}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot 1}$ $\sin \alpha_{\pi x} \simeq 0{,}40825$

$\alpha_{\pi x} \simeq 24° \ 5' \ 41$

$\alpha_{\pi z} : \sin \pi_y = \dfrac{|1 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 0|}{\sqrt{6} \cdot 1}$ $\sin \alpha_{\pi y} = 0{,}81650$ $\alpha_{\pi y} \simeq 54° \ 44' \ 8''$

$\alpha_{\pi z} : \sin \pi_z = \dfrac{1 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 1}{\sqrt{6} \cdot 1}$ $\sin \alpha_{\pi z} = 0{,}408025$ $\alpha_{\pi z} \simeq 24° \ 5' \ 41''$

28. Calcula la distància que hi ha entre els parells de punts següents:

a) $A(2, 5, -2)$, $B(-1, 1, -2)$

b) $A(-1, 7, 4)$, $B(-1, 2, 16)$

a) $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = 5$

b) $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = 13$

29. Troba la distància entre $P(4, 0, 1)$ i el punt en què s'intersequen la recta r i el pla π, essent:

$$r: \begin{cases} x - y = -3 \\ x + z = 1 \end{cases} \qquad \pi: x + y - 2z = 1$$

Trobem el punt d'intersecció entre r i π fent un sistema entre ambdós:

$$r: \begin{cases} x - y = -3 \\ x + z = 1 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases} \qquad T: (0, 3, 1)$$

$d(P, T) = |\overrightarrow{PT}| = \sqrt{29}$

30. La recta $\begin{cases} x = 8\lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - 6\lambda \end{cases}$ talla els plans $x + 2y - z = 1$ i $x - y + z = 3$ en els punts P i Q. Troba la distància entre P i Q.

T punt de tall entre recta i pla $x + 2y - z = 1$

$8\lambda + 2 \cdot 2 - (3 - 6\lambda) = 1$ $\lambda = 0$ $T = (0, 2, 3)$

T punt de tall entre recta i pla $x - y + z = 3$

$8\lambda - 2 + (3 - 6\lambda) = 3$ $\lambda = 1$ $T' = (8, 2 -3)$

$d(T, T') = |\overrightarrow{TT'}| = 10$

31. **Calcula, en cada cas, la distància entre el punt P i el pla π.**

a) $P(2, -3, 1)$; $\pi: 3x - 4z = 3$

b) $P(0, 1, 3)$; $\pi: x - y - 2z + 3 = 0$

c) $P(2, 0, 1)$; $\pi: x + y - 2z = 0$

a) $d(P, \pi) = \dfrac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{3^2 + 0^2 + (-4)^2}} = 1/5$

b) $d(P, \pi) = \dfrac{|0 - 1 - 2 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

c) $d(P, \pi) = \dfrac{2 + 0 - 2 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 0$

32. **Calcula la distància entre el punt (3, –4, 1) i el pla $y = 3$.**

$$d(P, \pi) = \frac{|-4 - 3|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = 7$$

33. **Calcula la distància entre el punt $Q(2, -1, 0)$ i el pla que conté $P(2, 0, 4)$ i s.**

Trobem l'equació del pla

$S = (3, 2, 4)$

$\overrightarrow{PS} = (1, 2, 0)$

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$3(z - 4) + 4(z - 4) = 0$

$7z - 28 = 0 \quad \rightarrow \quad z = 4$ eq. del pla

Calculem la distància

$$d(Q, \pi) = \frac{|0 - 4|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = 4$$

34. **Troba la distància entre els parells de plans següents:**

a) $\pi_1: x - 2y + 3 = 0$; $\pi_2: 2x - 4y + 1 = 0$

b) $\pi_1: 3x - 2y + z - 2 = 0$; $\pi_2: 2x - y + z = -5$

a) Són plans paral·lels ja que $\vec{V}_{\pi_1}$ i $\vec{V}_{\pi_2}$ els vectors associats als plans són proporcionals.
Escollim un punt qualsevol de π, i calcula la distància d'aquest punt al pla π_2.

P = (3, 3, 0) $\quad d(P, \pi_2) = \dfrac{|2 \cdot 3 - 4 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 0^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{20}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

b) Són plans secants ja que $\vec{V}_{\pi_1} = (3, -2, 1)$ i $\vec{V}_{\pi_2} = (2, -1, 1)$ no són proporcionals.

$d(\pi_1, \pi_2) = 0$

35. **Troba la distància de la recta r al pla π en cada cas:**

a) $r: \begin{cases} x = 2 + 4\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1 + 7\lambda \end{cases}$ $\quad\pi: 3x - 4y - 3 = 0$

b) $r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 5 \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$ $\quad\pi: 7x - 2y - z + 1 = 0$

a) $\vec{V}_r = (4, 3, 7)$ $\quad \vec{V}_r$ i $\vec{V}_n$ són perpendiculars ja que $V_r \cdot \vec{V}_n = 0$

$\vec{V}_n = (3, -4, 0)$ $\quad$ Això implica que la recta està continguda en el pla o bé és paral·lela el pla.

En qualsevol dels casos agafem un punt de la recta r i calculem la distància el pla

$$d(R, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2}} = \frac{3}{5}$$

b) $\vec{V}_r = (2, 0, 1)$ $\quad$ Els vectors no són ni perpendiculars $\vec{V}_r \cdot \vec{V}_n \neq 0$ ni proporcionals.

$\vec{V}_n = (7, -2, -1)$

Això vol dir que són secants, i llavors distància = 0.

36. **Calcula la distància que hi ha entre el punt $P(3, 1, 6)$ i la recta**

$r: \begin{cases} x = 4 + 4\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}$ **per mitjà dels passos següents:**

a) Troba un pla π, perpendicular a r que contingui P.

b) Fes la intersecció de π amb r. Anomena aquest punt Q.

c) Calcula la distància de P a Q.

a) Pla té com a vector associat $(4, 1, -3)$

$4x + y - 3z + D = 0$

Volem que P pertanyi al pla $\quad 4 \cdot 3 + 1 - 3 \cdot 6 + D = 0 \quad D = 5$

Pla: $4x + y - 3z + 5 = 0$

b) $\dfrac{x-4}{4} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{-3}$ eq. recta $\rightarrow$ recta $\begin{cases} x - 4 = 4y - 8 \\ -3y + 6 = z + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 4y + 4 = 0 \\ 3y + z - 5 = 0 \end{cases}$

Trobem Q resolent un sistema entre la recta i el pla

$\begin{cases} x - 4y + 4 = 0 \\ 3y + z - 5 = 0 \\ 4x + y - 3z + 5 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ $\quad Q = (0, 1, 2)$

c) $d(P, Q) = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = 5$

37. **Troba la distància entre el punt $P(2, 2, -11)$ i la recta r:**

$$r: \begin{cases} x = 9 + 12\lambda \\ y = -1 - 3\lambda \\ z = 6 + 5\lambda \end{cases}$$ **seguint els passos de l'exercici anterior.**

a) $12x - 3y + 5z + D = 0$

P $\in$ pla $\rightarrow$ $12 \cdot 2 - 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-11) + D = 0$ $\rightarrow$ $D = 37$

Pla: $12x - 3y + 5z + 37 = 0$

b) Fem un sistema entre la recta i el pla

$$\begin{cases} x = 9 + 12\lambda \\ y = -1 - 3\lambda \\ z = 6 + 5\lambda \\ 12x - 3y + 5z + 37 = 0 \end{cases}$$

$12(9 + 12\lambda) - 3(-1 - 3\lambda) + 5(6 + 5\lambda) + 37 = 0$

$108 + 144\lambda + 3 + 9\lambda + 30 + 25\lambda + 37 = 0$

$178\lambda + 178 = 0$

$\lambda = -1 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array}\right\} Q = (-3, 2, 1)$

c) $\overrightarrow{QP} = (5, 0, -12)$

$d(P, Q) = |\overrightarrow{QP}| = \sqrt{5^2 + 0^2 + (-12)^2} = 13$

38. **Calcula la distància que hi ha entre el punt $P(3, 1, 6)$ i la recta**

$$r: \begin{cases} x = 4 + 4\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}$$ **seguint els passos següents:**

a) Troba el vector $\overrightarrow{PQ}$ essent Q un punt de la recta r.

b) Troba l'àrea del paral·lelogram descrit pels vectors $\overrightarrow{PQ}$ i el vector director de r.

c) Divideix l'esmentada àrea entre el mòdul del vector director de r.

a) $Q = (4, 2, -1)$ $\quad \vec{V}_r = (4, 1, -3)$

$\overrightarrow{PQ} = (1, 1, -7)$

b) $\overrightarrow{PQ} \times \vec{V}_r = (4, -25, -3)$ $\quad |\overrightarrow{PQ} \times \vec{V}_r| = \sqrt{650}$

c) $|\vec{V}_r| = \sqrt{26}$

$$d(P_i \text{recta}) = \frac{\sqrt{650}}{\sqrt{26}} = 5$$

39. **Troba la distància entre el punt $P(2, 2, -11)$ i la recta r:**

$$r: \begin{cases} x = 9 + 12\lambda \\ y = -1 - 3\lambda \\ z = 6 + 5\lambda \end{cases}$$ **seguint els passos de l'exercici anterior.**

a) $Q = (9, -1, 6)$ $\quad \overrightarrow{PQ} = (7, -3, 17)$ $\quad \vec{V}_r = (12, -3, 5)$

b) $\overrightarrow{PQ} \times \vec{V}_r = (36, 169, 15)$ $\quad |\overrightarrow{PQ} \times \vec{V}_r| = \sqrt{30.082}$

c) $|\vec{V}_r| = \sqrt{178}$

$$d(P_i \text{recta}) = \frac{\sqrt{30.082}}{\sqrt{178}} = 5$$

40. **Calcula la distància que hi ha entre les rectes**

$$r: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = -10 - 3\lambda \\ z = \quad 9 + 5\lambda \end{cases} \quad \text{i} \quad s: \begin{cases} x = 2 - 12\lambda \\ y = 1 + \ 9\lambda \\ z = 4 + \quad \lambda \end{cases}$$ **mitjançant els passos següents:**

a) Troba el pla π, que contingui la recta r i sigui paral·lel a la recta s.

b) Troba la distància d'un punt (el que tu vulguis) de s al pla π.

a) El pla demanat ha de contenir $R = (0, -10, 9)$

$\vec{V}_r = (4, -3, 5)$

$\vec{V}_s = (-12, 9, 1)$

$$\begin{vmatrix} x - 0 & 4 & -12 \\ y + 10 & -3 & 9 \\ z - 9 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad 3x + 4y + 40 = 0$$

b) $S = (2, 1, 4)$ $\quad d(S, \text{pla}) = \dfrac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 40}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}} = 10$

41. **Troba la distància que hi ha entre les rectes:**

$$r: \begin{cases} x = -7 + \ 5\lambda \\ y = \quad 4 + \quad \lambda \\ z = 19 + 12\lambda \end{cases} \quad \text{i} \quad s: \begin{cases} x = 10 - 10\lambda \\ y = -2 + \ 5\lambda \\ z = 26 - 24\lambda \end{cases}$$ **seguint els passos de l'activitat anterior.**

a) El pla demanat ha de contenir $R = (-7, 4, 19)$

$\vec{V}_r = (5, 1, 12)$

$\vec{V}_s = (-10, 5, -24)$

$$\begin{vmatrix} x + 7 & 5 & -10 \\ y - 4 & 1 & 5 \\ z - 19 & 12 & -24 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad 12x - 5z + 179 = 0$$

b) $S = (10, -2, 26)$ $\quad d(S, \text{pla}) = \dfrac{12 \cdot 10 - 5 \cdot 26 + 179}{\sqrt{12^2 + 0^2 + (-5)^2}} = 13$

42. **Calcula la distància que hi ha entre les rectes**

$$r: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = -10 - 3\lambda \\ z = 9 + 5\lambda \end{cases} \quad \text{i} \quad s: \begin{cases} x = 2 - 12\lambda \\ y = 1 + 9\lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$$ **mitjançant els passos següents:**

a) Troba el vector $\overrightarrow{PQ}$ essent P i Q punts de les rectes r i s respectivament.

b) Troba el volum, V, del paral·lelepípede descrit per $\overrightarrow{PQ}$ i els vectors directors de r i s.

c) Troba l'àrea, A, del paral·lelogram descrit pels vectors directors de r i s.

d) La distància de r a s coincideix amb el resultat de dividir V entre A.

a) $P = (0, -10, 9)$ $\quad Q = (2, 1, 4)$ $\quad \vec{V}_r = (4, -3, 5)$ $\quad \vec{V}_s = (-12, 9, 1)$

$\overrightarrow{PQ} = (2, 11, -5)$

b) $|[\overrightarrow{PQ}, \vec{V}_r, \vec{V}_s]| = 440$

c) $|\vec{V}_r \times V_s| = 5$

d) $d(r, s) = \dfrac{440}{5} = 88$

43. **Troba l'àrea de cada un dels triangles:**

a) $A\,(2, 7, 3)$, $B\,(1, -5, 4)$, $C\,(7, 0, 11)$

b) $A\,(3, -7, 4)$, $B\,(-1, 2, 5)$, $C\,(-5, 11, 6)$

Justifica la solució del segon.

a) $\overrightarrow{AB}(-1, -12, 1)$; $\overrightarrow{AC}(5, -7, 8)$

$$\text{Àrea} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{|(-89, 13, 67)|}{2} = \frac{\sqrt{12\,579}}{2} \approx 56{,}08 \text{ u}^2$$

b) $\overrightarrow{AB}(-4, 9, 1)$; $\overrightarrow{AC}(-8, 18, 2)$

Les coordenades són proporcionals, així doncs els punts estan alineats:

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 0$

44. **Calcula, en cada cas, el volum del tetràedre amb vèrtexs:**

a) **(2, 1, 4); (1, 0, 2); (4, 3, 2); (1, 5, 6)**

b) **(4, 1, 2); (2, 0, 1); (2, 3, 4); (6, 5, 1)**

a) $A(2, 1, 4)$ $\; B(1, 0, 2)$ $\; C(4, 3, 2)$ $\; D(1, 5, 6)$

$\overrightarrow{AB}(-1, -1, -2)$ $\; \overrightarrow{AC}(2, 2, -2)$ $\; \overrightarrow{AD}(-1, 4, 2)$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -30 \rightarrow \text{Volum} = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5 \text{ u}^3$$

b) $A(4, 1, 2)$ $B(2, 0, 1)$ $C(2, 3, 4)$ $D(6, 5, 1)$

$\overrightarrow{AB}(-2, -1, -1)$ $\overrightarrow{AC}(-2, 2, 2)$ $\overrightarrow{AD}(2, 4, -1)$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 30 \rightarrow \text{Volum} = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5 \text{ u}^3$$

45. **Calcula l'àrea total i el volum del tetràedre de vèrtexs:**

A **(2, 3, 1),** ***B*** **(4, 1, –2),** ***C*** **(6, 3, 7),** ***D*** **(–5, –4, 8)**

- Àrea del triangle ABC:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2, -2, -3) \times (4, 0, 6) = (-12, -24, 8)$$

$$\text{Àrea} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{784}}{2} = \frac{28}{2} = 14 \text{ u}^2$$

- Àrea del triangle ABD:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (2, -2, -3) \times (-7, -7, 7) = (-35, 7, -28)$$

$$\text{Àrea} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|}{2} = \frac{\sqrt{2\,058}}{2} \approx 22{,}68 \text{ u}^2$$

- Àrea del triangle ACD:

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = (4, 0, 6) \times (-7, -7, 7) = (42, -70, -28)$$

$$\text{Àrea} = \frac{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}|}{2} = \frac{\sqrt{7\,448}}{2} \approx 43{,}15 \text{ u}^2$$

- Àrea del triangle BCD:

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = (2, 2, 9) \times (-9, -5, 10) = (65, -101, 8)$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}|}{2} = \frac{\sqrt{14\,490}}{2} \approx 60{,}19 \text{ u}^2$$

- Àrea total = $14 + 22{,}68 + 43{,}15 + 60{,}19 = 140{,}02 \text{ u}^2$

- Volum: $\overrightarrow{AB}(2, -2, -3)$ $\overrightarrow{AC}(4, 0, 6)$ $\overrightarrow{AD}(-7, -7, 7)$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 308 \rightarrow \text{Volum} = \frac{308}{6} \approx 51{,}33 \text{ u}^3$$

46. **Calcula el volum del tetràedre determinat pels eixos coordenats i el pla: $6x - 5y + 3z - 1 = 0$.**

☛ ***Recorda que $V = 1/3 \cdot$ àrea base × altura.***

En aquest cas és molt senzill obtenir ambdues ja que és un tetràedre amb tres arestes perpendiculars entre si.

Fes-ho també utilitzant el producte mixt i comprova que hi obtens el mateix resultat.

- Busquem els vèrtexs:

$$x = y = 0 \rightarrow z = \frac{1}{3} \rightarrow A\left(0, 0, \frac{1}{3}\right)$$

$$y = z = 0 \rightarrow x = \frac{1}{6} \rightarrow B\left(\frac{1}{6}, 0, 0\right)$$

$$x = z = 0 \rightarrow y = -\frac{1}{5} \rightarrow C\left(0, -\frac{1}{5}, 0\right)$$

$O(0, 0, 0)$

- Calculem el volum:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{540} \text{ u}^3$$

- El calculem utilitzant el producte mixt:

$$V = \frac{1}{6}\ |[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}]| = |\ \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 0 \end{vmatrix}| = \frac{1}{540} \text{ u}^3$$

47. **Troba l'equació del pla perpendicular a la recta $\frac{x+3}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z}{4}$ i que passa pel punt (–1, 1, 0), i calcula el volum de la figura limitada pel pla anterior i els tres plans coordenats.**

Un vector normal al pla és $\vec{n}(2, 3, 4)$.

L'equació del pla és: $2(x + 1) + 3(y - 1) + 4(z - 0) = 0$

$$2x + 3y + 4z - 1 = 0$$

Calculem els vèrtexs:

$$x = y = 0 \rightarrow z = \frac{1}{4} \rightarrow A\left(0, 0, \frac{1}{4}\right)$$

$$y = z = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow B\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$$

$$x = z = 0 \rightarrow y = \frac{1}{3} \rightarrow C\left(0, \frac{1}{3}, 0\right)$$

$O(0, 0, 0)$

$$\text{Volum} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{144} \text{ u}^3$$

48. **Digues quines de les equacions següents corresponen a esferes i troba'n el centre i el radi:**

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 = 0$

b) $2x^2 - 2y^2 + 2z^2 + 4x - 16 = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x - 16 = 0$

d) $x^2 + 3y^2 + z^2 - 2xz - 4 = 0$

e) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 12z - 3 = 0$

f) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 12z - 30 = 0$

g) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 6y - 3/2 = 0$

a) Centre $(1, -2, 0)$ i radi $\sqrt{13}$.

b) No és una esfera.

c) Centre $(-1, 0, 0)$ i radi 3.

d) No és una esfera.

e) Centre $(-1, 0, 2)$ i radi $\sqrt{6}$.

f) Centre $(-1, 0, 2)$ i radi $\sqrt{15}$.

g) Centre $\left(1, -\frac{3}{2}, 0\right)$ i radi 2.

49. **Troba l'equació de les esferes següents:**

a) Centre $(1, 0, -5)$ i radi 1.

b) Diàmetre $A(3, -4, 2)$, $B(5, 2, 0)$.

c) Centre $(4, -2, 3)$ i tangent al pla $x - z = 0$.

d) Centre $(3, -1, 2)$ i tangent al pla YZ.

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 10z + 25 = 0$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y - 2z + 7 = 0$

c) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y - 6z + \frac{57}{2} = 0$

d) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 5 = 0$

50. **Troba el lloc geomètric dels punts la distància dels quals $(2, -1, 4)$ és igual a 7.**

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 8z + 28 = 0$

51. **Troba l'equació del pla π que conté la recta** $r: \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$

i és ortogonal al pla σ: $2x - y + 3z + 1 = 0$.

Obtén també les equacions paramètriques de la recta determinada per π i σ.

Obtenim un punt i un vector direcció de la recta r:

$$P(1, -1, 1) \in r \;\rightarrow\; P(1, -1, 1) \in \pi$$

$$(1, 1, -1) \times (1, 2, 1) = (3, -2, 1) = \vec{d} \,//\, r \;\rightarrow\; \vec{d}(3, -2, 1) \,//\, \pi$$

Si π és ortogonal a σ, el vector normal de σ és paral·lel a π:

$$\vec{n}_\sigma(2, -1, 3) \perp \sigma \;\rightarrow\; (2, -1, 3) \,//\, \pi$$

Obtenim un vector normal a π: $(3, -2, 1) \times (2, -1, 3) = (-5, -7, 1) \;\rightarrow\; (5, 7, -1)$.

L'equació del pla π és: $5(x - 1) + 7(y + 1) - 1(z - 1) = 0$

$$5x + 7y - z + 3 = 0$$

- Equacions paramètriques de la recta determinada per π i σ:

$$\left.\begin{array}{l} \pi\text{: } 5x + 7y - z + 3 = 0 \\ \sigma\text{: } 2x - y + 3z + 1 = 0 \end{array}\right\}$$

Vector direcció de la recta: $(5, 7, -1) \times (2, -1, 3) = (20, -17, -19)$.

Punt de la recta:

$$x = 0 \;\rightarrow\; \left.\begin{array}{r} 7y - z + 3 = 0 \\ -y + 3z + 1 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{2} \\ z = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} R\left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Equacions de la recta: $\begin{cases} x = 20\lambda \\ y = -\dfrac{1}{2} - 17\lambda \\ z = -\dfrac{1}{2} - 19\lambda \end{cases}$

52. **Donats la recta $r: \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - y}{1} = \dfrac{z + 1}{3}$ i el pla π: $x + 3y - 3z + 3 = 0$, troba el pla que conté r i és perpendicular a π.**

$$r\text{: } \frac{x}{2} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z + 1}{3} \;\rightarrow\; P(0, 1, -1);\; \vec{d}(2, -1, 3)$$

$$\pi\text{: } x + 3y - 3z + 3 = 0 \;\rightarrow\; \vec{n}(1, 3, -3)$$

El pla serà paral·lel a $\vec{d}$ i a $\vec{n}$ i contindrà P.

Un vector normal serà: $(2, -1, 3) \times (1, 3, -3) = (-6, 9, 7) \rightarrow (6, -9, -7)$.

L'equació del pla és: $6(x - 0) - 9(y - 1) - 7(z + 1) = 0$

$$6x - 9y - 7z + 2 = 0$$

53. **Determina la perpendicular comuna a les rectes:**

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x + y = z + 4} \\ \boldsymbol{x + 2y = 7} \end{cases} \qquad \boldsymbol{s}: \begin{cases} \boldsymbol{x - 2 = 0} \\ \boldsymbol{y + 3 = 0} \end{cases}$$

Escrivim les dues rectes en forma paramètrica:

$$r: \left\{ \begin{array}{l} x + y = z + 4 \\ x + 2y = 7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Restant la 1a equació a la 2a: } y = 3 - z \\ x = 7 - 2y = 7 - 2(3 - z) = 1 + 2z \end{array}$$

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \text{Un punt genèric de } r \text{ és: } R(1 + 2\lambda, 3 - \lambda, \lambda).$$

$$s: \left\{ \begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow s: \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = \mu \end{cases} \rightarrow \text{Un punt genèric de } s \text{ és: } S(2, -3, \mu).$$

Un vector genèric d'origen en r i extrem en s és: $\overrightarrow{RS}(1 - 2\lambda, -6 + \lambda, \mu - \lambda)$.

Aquest vector ha de ser perpendicular a r i a s:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{RS} \cdot (2, -1, 1) = 0 \rightarrow 2 - 4\lambda + 6 - \lambda + \mu - \lambda = 0 \rightarrow -6\lambda + \mu + 8 = 0 \\ \overrightarrow{RS} \cdot (0, 0, 1) = 0 \rightarrow \mu - \lambda = 0 \rightarrow \mu = \lambda \end{array} \right\}$$

$$-5\lambda + 8 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{8}{5}; \; \mu = \frac{8}{5}$$

Així:

$$\left. \begin{array}{l} R\left(\frac{21}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right) \\ S\left(2, -3, \frac{8}{5}\right) \end{array} \right\} \overrightarrow{RS}\left(-\frac{11}{5}, -\frac{22}{5}, 0\right) \rightarrow \vec{d}(1, 2, 0)$$

La perpendicular comuna a les rectes és:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = 8/5 \end{cases}$$

54. a) Troba p perquè les rectes r_1 i r_2 siguin perpendiculars:

$$r_1: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2} \qquad\qquad r_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-p}{p-1} = \frac{z-3}{3}$$

b) Calcula'n el punt d'intersecció i l'equació del pla que les conté.

a) $(4, -2, 2) \cdot (1, p-1, 3) = 4 - 2p + 2 + 6 = 12 - 2p = 0 \;\rightarrow\; p = 6$

b) $r_1: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 6 + 5\mu \\ z = 3 + 3\mu \end{cases}$

- Punt d'intersecció:

$\left.\begin{array}{r} 4\lambda = 1 + \mu \\ 1 - 2\lambda = 6 + 5\mu \\ 2\lambda = 3 + 3\mu \end{array}\right\}$ Sumant les dues últimes equacions:

$1 = 9 + 8\mu \;\rightarrow\; -8 = 8\mu \;\rightarrow\; \mu = -1$

$\lambda = \frac{3 + 3\mu}{2} = \frac{3 - 3}{2} = 0$

1a equació: $4 \cdot 0 = 1 - 1$. Per tant $\lambda = 0$, $\mu = -1$.

Substituint $\lambda = 0$ en les equacions de r_1 (o bé $\mu = -1$ en les de r_2), obtenim el punt de tall: $(0, 1, 0)$.

- Equació del pla que les conté:

$(4, -2, 2) \times (1, 5, 3) = (-16, -10, 22) \;\rightarrow\; (8, 5, -11)$ és un vector normal al pla.

Equació: $8(x - 0) + 5(y - 1) - 11(z - 0) = 0$

$8x + 5y - 11z - 5 = 0$

55. Donats la recta $r: \begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$ i el pla π: $x + 2y + 3z - 1 = 0$, troba l'equació d'una recta situada en el pla π, que passi pel punt $P(2, 1, -1)$ i sigui perpendicular a r.

Un vector direcció de r és: $(1, 0, -2) \times (0, 1, -1) = (2, 1, 1)$.

La recta que busquem ha de ser perpendicular a $(2, 1, 1)$ i perpendicular a $(1, 2, 3)$ (ja que està situada en el pla π). Un vector direcció de la recta és:

$(2, 1, 1) \times (1, 2, 3) = (1, -5, 3)$

El punt $P(2, 1, -1)$ pertany al pla i ha de pertànyer a la recta buscada. Així doncs la recta és:

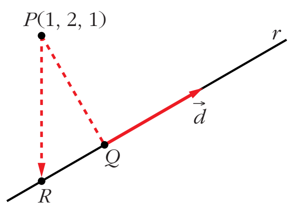
$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 5\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$$

56. **Troba l'equació de la recta que passa pel punt (1, 2, 1) i talla perpendicularment la recta:** $\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x - y - z = 1} \\ \boldsymbol{x + \quad z = 2} \end{cases}$

Escrivim r en forma paramètrica:

$$r: \begin{cases} x - y - z = 1 & \rightarrow \quad y = x - z - 1 = 2 - z - z - 1 = 1 - 2z \\ x + \quad z = 2 & \rightarrow \quad x = 2 - z \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \quad \text{Un punt genèric de } r \text{ és: } R(2 - \lambda, 1 - 2\lambda, \lambda).$$



Si anomenem el punt $P(1, 2, 1)$, el vector $\overrightarrow{PR}$ ha de ser perpendicular a r, és a dir, perpendicular a $\vec{d}(-1, -2, 1)$.

Per tant, com que $\overrightarrow{PR}(1 - \lambda, -1 - 2\lambda, -1 + \lambda)$:

$\overrightarrow{PR} \cdot \vec{d} = 0 \quad \rightarrow \quad (1 - \lambda, -1 - 2\lambda, -1 + \lambda) \cdot (-1, -2, 1) = 0$

$-1 + \lambda + 2 + 4\lambda - 1 + \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad 6\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 0$

La recta que busquem passa pel punt $P(1, 2, 1)$ i pel punt $Q(2, 1, 0)$ (Q s'obté substiuint $\lambda = 0$ en les equacions de r).

Un vector direcció serà: $\overrightarrow{PQ}(12, -1, -1)$.

La recta és: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

57. **Els vèrtexs del triangle *ABC* són els punts de tall del pla $2x + y - 3z = 6$ amb els eixos coordenats. Troba l'equació de l'altura que parteix del vèrtex *B* i que està en l'eix *OY*.**

Els vèrtexs del triangle són:

$$y = z = 0 \quad \rightarrow \quad 2x = 6 \quad \rightarrow \quad x = 3 \quad \rightarrow \quad A(3, 0, 0)$$

$$x = z = 0 \quad \rightarrow \quad y = 6 \quad \rightarrow \quad B(0, 6, 0)$$

$$x = y = 0 \quad \rightarrow \quad -3z = 6 \quad \rightarrow \quad z = -2 \quad \rightarrow \quad C(0, 0, -2)$$

Hem de buscar l'equació de l'altura que parteix de B.

El seu vector direcció $\vec{d}(a, b, c)$ ha de ser:

— Ortogonal a $\overrightarrow{AC} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{AC} \cdot \vec{d} = 0$

— Ortogonal al vector normal del pla ABC, és a dir, del pla $2x + y - 3z = 6$, atès que l'altura ha d'estar continguda en aquest pla $\rightarrow \ (2, 1, -3) \cdot \vec{d} = 0$

Per tant tenim que:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AC} \cdot \vec{d} = 0 \quad \rightarrow \quad (-3, 0, -2) \cdot (a, b, c) = 0 \quad \rightarrow \quad 3a + 2c = 0 \\ (2, 1, -3) \cdot \vec{d} = 0 \quad \rightarrow \quad (2, 1, -3) \cdot (a, b, c) = 0 \quad \rightarrow \quad 2a + b - 3c = 0 \end{array}\right\}$$

Solucions: $(-2t, 13t, 3t)$ $\rightarrow$ Si $t = -1$, $\vec{d}(2, -13, -3)$

Equació de l'altura que passa per B:

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 6 - 13\lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$$

58. Troba el punt P de la recta $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{3}$ que equidisti dels plans:

$$\alpha: x + y + z = -3 \quad \text{i} \quad \beta: \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = \quad -\lambda + \mu \\ z = -6 + \mu \end{cases}$$

- Un punt genèric de la recta r és: $R(1 + 2\lambda, -1 + \lambda, 3\lambda)$.
- Escrivim el pla β en forma implícita:

$$\begin{vmatrix} x+3 & 1 & 0 \\ y & -1 & 1 \\ z+6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \beta: x + y - z - 3 = 0$$

- La distància de R a α i a β ha de ser la mateixa: $dist\,(R, \alpha) = dist\,(R, \beta)$.

$$\frac{|1 + 2\lambda - 1 + \lambda + 3\lambda + 3|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|1 + 2\lambda - 1 + \lambda - 3\lambda - 3|}{\sqrt{1+1+1}}, \text{ és a dir:}$$

$$|6\lambda + 3| = 3 \begin{cases} 6\lambda + 3 = 3 \quad \rightarrow \quad 6\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 0 \\ 6\lambda + 3 = -3 \quad \rightarrow \quad 6\lambda = -6 \quad \rightarrow \quad \lambda = -1 \end{cases}$$

Hi ha dues solucions: $P(1, -1, 0)$ i $P'(-1, -2, -3)$.

59. Sigui r la recta d'intersecció dels plans $ax + 9y - 3z = 8$ i $x + ay - z = 0$.

Determina el valor de a perquè:

a) Els dos plans siguin paral·lels.

b) Els dos plans siguin perpendiculars.

c) La recta r talli el pla OXY en un punt a $\sqrt{2}$ de distància de l'origen de coordenades.

a) Les coordenades de $(a, 9, -3)$ i $(1, a, -1)$ han de ser proporcionals:

$$\frac{a}{1} = \frac{9}{a} = \frac{-3}{-1} \begin{cases} \dfrac{a}{1} = \dfrac{-3}{-1} \quad \rightarrow \quad a = 3 \\ \dfrac{9}{a} = \dfrac{-3}{-1} \quad \rightarrow \quad a = 3 \end{cases} \Bigg\} \; a = 3$$

b) Els vectors normals han de ser perpendiculars:

$$(a, 9, -3) \cdot (1, a, -1) = a + 9a + 3 = 10a + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad a = \frac{-3}{10}$$

c) El pla OXY és el pla $z = 0$. Busquem el punt de tall de r amb el pla OXY:

$$\left.\begin{aligned} ax + 9y - 3z &= 8 \\ x + ay - z &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} ax + 9y &= 8 \\ x + ay &= 0 \end{aligned}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} a & 9 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 9$$

(El problema només té solució si $a^2 - 9 \neq 0$, és a dir, si $a \neq 3$ i $a \neq -3$. Si $a = 3$ o $a = -3$, el sistema és incompatible.)

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 0 & a \end{vmatrix} = 8a; \quad |A_y| = \begin{vmatrix} a & 8 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

$$x = \frac{8a}{a^2 - 9}; \quad y = \frac{-8}{a^2 - 9}; \quad z = 0$$

El punt de tall és $P\left(\dfrac{8a}{a^2 - 9}, \dfrac{-8}{a^2 - 9}, 0\right)$. La seva distància a l'origen ha de ser $\sqrt{2}$:

$$dist\,(P, O) = \sqrt{\left(\frac{8a}{a^2 - 9}\right)^2 + \left(\frac{-8}{a^2 - 9}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$\left(\frac{8a}{a^2 - 9}\right)^2 + \left(\frac{-8}{a^2 - 9}\right)^2 = 2 \quad \rightarrow \quad \frac{64a^2 + 64}{(a^2 - 9)^2} = 2$$

$$64a^2 + 64 = 2(a^4 + 81 - 18a^2) \quad \rightarrow \quad 64a^2 + 64 = 2a^4 + 162 - 36a^2$$

$$0 = 2a^4 - 100a^2 + 98 \quad \rightarrow \quad a^4 - 50a^2 + 49 = 0$$

$$a^2 = \frac{50 \pm \sqrt{2500 - 196}}{2} = \frac{50 \pm \sqrt{2304}}{2} = \frac{50 \pm 48}{2} = \begin{cases} a^2 = 49 \quad \rightarrow \quad a = \pm 7 \\ a^2 = 1 \quad \rightarrow \quad a = \pm 1 \end{cases}$$

Hi ha quatre solucions: $a_1 = -7$, $a_2 = 7$, $a_3 = -1$, $a_4 = 1$.

Pàgina 187

60. Troba l'equació del pla que conté la recta d'equacions paramètriques: $(-1 + 3\lambda,\ 1 + 2\lambda,\ 2 + \lambda)$ i és perpendicular al pla $2x + y - 3z + 4 = 0$.

Determina també l'angle format per la recta i el pla donats.

Un vector normal al pla és: $(3, 2, 1) \times (2, 1, -3) = (-7, 11, -1) \rightarrow (7, -11, 1)$.

Un punt del pla és $(-1, 1, 2)$ (ja que conté la recta).

- L'equació del pla serà:

$$7(x + 1) - 11(y - 1) + 1(z - 2) = 0$$

$$7x - 11y + z + 16 = 0$$

• Angle format per la recta i el pla donats:

$\vec{d}(3, 2, 1)$; $\vec{n}(2, 1, -3)$

$$cos\,(90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}||\vec{n}|} = \frac{6 + 2 - 3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{5}{14} = 0{,}357$$

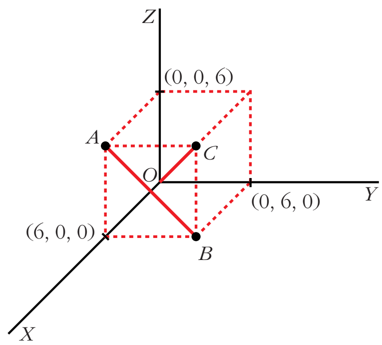
$90° - \alpha = 69°\ 4'\ 31" \quad \to \quad \alpha = 20°\ 55'\ 29"$

61. **Donat un cub (hexàedre regular) de costat 6 cm, troba la mínima distància d'una diagonal del cub a una diagonal d'una de les seves cares, si sabem que les rectes d'ambdues diagonals s'encreuen.**

☛ ***Dibuixa el cub amb un vèrtex en l'origen i els contigus sobre els eixos coordenats.***

• La diagonal del cub passa per $O(0, 0, 0)$ i per $C(6, 6, 6)$:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$



• La diagonal de la cara passa per $A(6, 0, 6)$ i per $B(6, 6, 0)$:

$$s: \begin{cases} x = 6 \\ y = \mu \\ z = 6 - \mu \end{cases}$$

• $dist\,(r, s) = \dfrac{\text{Volum del paral·lelepípede}}{\text{Àrea de la base}} = \dfrac{|[\vec{d}, \vec{d}', \overrightarrow{OA}]|}{|\vec{d} \times \vec{d}'|}$

$$[\vec{d}, \vec{d}', \overrightarrow{OA}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -6$$

$\vec{d} \times \vec{d}' = (1, 1, 1) \times (0, 1, -1) = (-2, 1, 1) \quad \to \quad |\vec{d} \times \vec{d}'| = \sqrt{6}$

Per tant: $dist\,(r, s) = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$.

62. **Troba l'equació del pla el punt més pròxim a l'origen del qual és (1, 3, 2).**

Si el punt més pròxim a l'origen és $P(1, 3, 2)$, el vector $\overrightarrow{OP}(1, 3, 2)$ és normal al pla. Per tant, l'equació del pla és:

$1(x - 1) + 3(y - 3) + 2(z - 2) = 0$

$x + 3y + 2z - 14 = 0$

63. **Determina, raonadament, si les rectes**

$$r: \begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x - y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

es tallen o s'encreuen. Troba també el cosinus de l'angle que formen les seves direccions.

Obtenim un punt i un vector direcció de cada una de les dues rectes:

$\vec{d}_r$: $(1, 1, -2) \times (2, -1, 1) = (-1, -5, -3) \rightarrow \vec{d}_r(1, 5, 3)$; $P(0, -1, 0)$

$\vec{d}_s$: $(2, 1, -1) \times (1, -1, -2) = (-3, 3, -3) \rightarrow \vec{d}_s(1, -1, 1)$; $P'(0, 1, 0)$

$\overrightarrow{PP'}(0, 2, 0)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Las rectes s'encreuen.}$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r|\,|\vec{d}_s|} = \frac{|1 - 5 + 3|}{\sqrt{35} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{105}} = 0{,}0976$$

64. **Determina les condicions que han de complir a i b perquè aquests tres plans: $ax + z - 1 = 0$, $x + bz + 2 = 0$, $\sqrt{5}x + 3y + 2z - 3 = 0$ es tallin en un punt.**

Si fem $a = 2$ i $b = 1$, obtenim les equacions paramètriques de la recta determinada pels dos primers, com també l'angle que aquesta forma amb el tercer.

$$\left.\begin{aligned} ax \quad\quad + z &= 1 \\ x \quad\quad + bz &= -2 \\ \sqrt{5}x + 3y + 2z &= 3 \end{aligned}\right\}$$ Perquè els tres plans es tallin en un punt, el sistema ha de tenir solució única, és a dir:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & b \\ \sqrt{5} & 3 & 2 \end{vmatrix} = -3(ab - 1) \neq 0 \rightarrow ab \neq 1$$

- **Si $a = 2$ i $b = 1$**, la recta determinada pels dos primers plans és:

$$\left.\begin{aligned} 2x + z - 1 &= 0 \\ x + z + 2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{Restant: } x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \\ &z = -2 - x = -2 - 3 = -5 \end{aligned}$$

Equacions paramètriques: $\begin{cases} x = 3 \\ y = \lambda \\ z = -5 \end{cases}$

- **Angle que forma la recta amb el 3r pla:**

$\vec{d}(0, 1, 0)$ $\vec{n}(\sqrt{5}, 3, 2)$

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}|\,|\vec{n}|} = \frac{3}{1\sqrt{18}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow 90° - \alpha = 45° \rightarrow \alpha = 45°$$

65. **a) Troba els punts de r: $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ que disten $\frac{1}{3}$ del pla π: $2x - y + 2z + 1 = 0$.**

b) Obtén els punts de π que disten $\frac{1}{3}$ dels punts trobats en l'apartat anterior.

a) Escrivim r en forma paramètrica:

$$\left.\begin{array}{l} y = -x \\ z = x \end{array}\right\} \rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \text{Un punt de } r \text{ és de la forma } R(\lambda, -\lambda, \lambda).$$

$$dist\,(R, \pi) = \frac{|2\lambda + \lambda + 2\lambda + 1|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|5\lambda + 1|}{3} = \frac{1}{3} \begin{cases} 5\lambda + 1 = 1 \rightarrow \lambda = 0 \\ 5\lambda + 1 = -1 \rightarrow \lambda = -2/5 \end{cases}$$

Hi ha dos punts: $(0, 0, 0)$ i $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$.

b) Els dos punts obtinguts estan a distància $\frac{1}{3}$ de π.

Es tracta de trobar la projecció d'aquests punts sobre el pla π.

- Per a $(0, 0, 0)$:

  Obtenim la recta que passa per $(0, 0, 0)$ i és perpendicular a π:

  $$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

  Busquem el punt de tall d'aquesta recta amb π:

  $$4\lambda + \lambda + 4\lambda + 1 = 0 \rightarrow 9\lambda = -1 \rightarrow \lambda = -\frac{1}{9}$$

  El punt és $\left(-\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, -\frac{2}{9}\right)$.

- Per a $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$:

  Busquem la recta que passa per aquest punt i és perpendicular a π:

  $$\begin{cases} x = -2/5 + 2\lambda \\ y = 2/5 - \lambda \\ z = -2/5 + 2\lambda \end{cases}$$

  Obtenim el punt de tall d'aquesta recta amb π:

  $$2\left(-\frac{2}{5} + 2\lambda\right) - \left(\frac{2}{5} - \lambda\right) + 2\left(-\frac{2}{5} + 2\lambda\right) + 1 = 0$$

  $$-\frac{4}{5} + 4\lambda - \frac{2}{5} + \lambda - \frac{4}{5} + 4\lambda + 1 = 0$$

  $$9\lambda - 1 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{1}{9}$$

El punt és $\left(-\frac{8}{45}, \frac{13}{45}, -\frac{8}{45}\right)$.

66. **Tenim els punts $P(3, 1, 5)$ i $Q(-1, 7, 3)$. Pel punt mitjà del segment PQ tracem un pla π que ha de ser perpendicular a aquest segment. Aquest pla talla els eixos coordenats en els punts A, B i C.**

a) Escriu l'equació de π.

b) Calcula l'àrea del triangle ABC.

a) El pla és perpendicular al vector $\overrightarrow{PQ}(-4, 6, -2)$; un vector normal al pla és $(2, -3, 1)$.

Passa pel punt mitjà del segment PQ: $M(1, 4, 4)$.

L'equació del pla és: $2(x-1) - 3(y-4) + 1(z-4) = 0$

$$\pi: 2x - 3y + z + 6 = 0$$

b) Busquem els vèrtexs del triangle:

$y = z = 0 \rightarrow 2x + 6 = 0 \rightarrow x = -3 \rightarrow A(-3, 0, 0)$

$x = z = 0 \rightarrow -3y + 6 = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow B(0, 2, 0)$

$x = y = 0 \rightarrow z + 6 = 0 \rightarrow z = -6 \rightarrow C(0, 0, -6)$

$\overrightarrow{AB}(3, 2, 0)$ $\overrightarrow{AC}(3, 0, -6)$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-12, 18, -6) \rightarrow |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{504}$

$$\text{Àrea} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{504}}{2} \approx 11{,}22 \text{ u}^2$$

67. **Calcula el volum d'un cub que té arestes sobre cada una de les rectes r i s:**

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 6t \\ z = -1 - t \end{cases} \qquad s: \frac{x}{13} = \frac{y-8}{2} = \frac{z-6}{14}$$

- Busquem la posició relativa de les dues rectes:

$\vec{d}_r = (2, 6, -1)$; $P(1, -2, -1)$

$\vec{d}_s = (13, 2, 14)$; $P'(0, 8, 6)$

$\overrightarrow{PP'}(-1, 10, 7)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 13 & -1 \\ 6 & 2 & 10 \\ -1 & 14 & 7 \end{vmatrix} = -1\,014 \rightarrow \text{Les rectes s'encreuen.}$$

• L'aresta del cub és la distància entre les dues rectes:

$$dist\,(r,\ s) = \frac{\text{Volum del paral·lelepípede}}{\text{Àrea de la base}} = \frac{1014}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|} = \frac{1014}{|(86, -41, -74)|} =$$

$$= \frac{1014}{\sqrt{14553}} = \text{aresta del cub}$$

• El volum del cub és:

$$V = \left(\frac{1014}{\sqrt{14553}}\right)^3 \approx 593{,}86\ \text{u}^3$$

68. **Determina l'equació contínua de la recta r que és perpendicular i talla les rectes s i t d'equacions:**

s: (1 + 2λ , 2 – λ, 1 + λ) **t: (4 + μ, 6 + μ, 5 – 2μ)**

Un vector genèric d'origen en s i extrem en t és:

$$\overrightarrow{ST}(3 - 2\lambda + \mu,\ 4 + \lambda + \mu,\ 4 - \lambda - 2\mu)$$

Aquest vector ha de ser perpendicular a les dues rectes:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{ST} \cdot (2, -1, 1) = 0 \ \rightarrow\ 6 - 4\lambda + 2\mu - 4 - \lambda - \mu + 4 - \lambda - 2\mu = 0 \ \rightarrow\ 6\lambda + \mu = 6 \\ \overrightarrow{ST} \cdot (1, 1, -2) = 0 \ \rightarrow\ 3 - 2\lambda + \mu + 4 + \lambda + \mu - 8 + 2\lambda + 4\mu = 0 \ \rightarrow\ \lambda + 6\mu = 1 \end{array}\right\}$$

$\lambda = 1,\ \ \mu = 0$

La recta que busquem talla s en $S(3, 1, 2)$, i talla t en $T(4, 6, 5)$.

Un vector direcció és $\overrightarrow{ST}(1, 5, 3)$.

La seva equació contínua és: $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z-2}{3}$.

69. **Troba els punts simètrics de $P(1, 2, 3)$ respecte del pla α: $x - 3y - 2z + 4 = 0$**

i respecte de la recta r: $\left\{\begin{array}{l} x - y + 3 = 0 \\ 4x - z = 0 \end{array}\right.$

■ Simètric respecte del pla:

• Equació de la recta que passa per P i és perpendicular a α:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{array}\right.$$

• Punt de tall de α amb la recta anterior:

$$(1 + \lambda) - 3(2 - 3\lambda) - 2(3 - 2\lambda) + 4 = 0$$

$$1 + \lambda - 6 + 9\lambda - 6 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$14\lambda - 7 = 0 \ \rightarrow\ \lambda = \frac{1}{2}$$

La recta i el pla es tallen en $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$. Aquest és el punt mitjà del segment PP', de manera que P' és el simètric de P respecte del pla α. Per tant, si $P'(x, y, z)$, aleshores: $\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z+3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right) \rightarrow P'(2, -1, 1)$.

- Simètric respect de la recta:
  - Escrivim la recta en paramètriques:

$$\left.\begin{cases} x - y + 3 = 0 & \rightarrow \quad y = x + 3 \\ 4x - z = 0 & \rightarrow \quad z = 4x \end{cases}\right\} \rightarrow \quad r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

  - Busquem l'equació del pla perpendicular a r que passa per P:

$$1(x-1) + 1(y-2) + 4(z-3) = 0$$

$$x + y + 4z - 15 = 0$$

  - Obtenim el punt d'intersecció de la recta r amb el pla:

$$\lambda + 3 + \lambda + 16\lambda - 15 = 0$$

$$18\lambda - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{2}{3}$$

El punt de tall és $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right)$. Aquest és el punt mitjà del segment PP'', de manera que P'' és el simètric de P respecte de la recta r. Així, si $P''(a, b, c)$, aleshores: $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+2}{2}, \frac{c+3}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right) \rightarrow P''\left(\frac{1}{3}, \frac{16}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

70. Troba la distància entre el punt $P(2, 1, 3)$ i la recta $r: \begin{cases} 2x - y - z - 3 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$

- Escrivim la recta r en forma paramètrica:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 3 + z \\ x - y &= 2 - z \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \text{Restant:} \quad x &= 1 + 2z \\ y = x + z - 2 &= -1 + 3z \end{aligned}\right\} \quad r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- Busquem l'equació del pla que passa por P i és perpendicular a r:

$$2(x-2) + 3(y-1) + 1(z-3) = 0$$

$$\pi: 2x + 3y + z - 10 = 0$$

- Obtenim el punt de tall de r amb π:

$$2(1 + 2\lambda) + 3(-1 + 3\lambda) + \lambda - 10 = 0$$

$$2 + 4\lambda - 3 + 9\lambda + \lambda - 10 = 0$$

$$14\lambda - 11 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{11}{14}$$

El punt de tall és $Q\left(\frac{18}{7}, \frac{19}{14}, \frac{11}{14}\right)$.

• Calculem la distància:

$$dist\,(P,\ r) = dist\,(P,\ Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \left|\left(\frac{4}{7}, \frac{5}{14}, \frac{-31}{14}\right)\right| = \sqrt{\frac{1\,050}{196}} = \sqrt{\frac{75}{14}} \approx 2{,}31$$

71. **Donats els punts $A\,(1, 5, -2)$, $B\,(4, 0, 1)$ i $C\,(-3, 2, 0)$:**

a) Prova que són els vèrtexs d'un triangle.

b) Troba la longitud del segment que ve determinat en els seus extrems pel punt B i la seva projecció sobre AC.

a) Cal demostrar que els punts no estan alineats.

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}(3, -5, 3)\\ \overrightarrow{AC}(-4, -3, 2)\end{array}\right\}$ Les seves coordenades no són proporcionals, per tant els punts no estan alineats. Són els vèrtexs d'un triangle.

b) • Obtenim l'equació del costat AC:

$$r: \begin{cases} x = -3 - 4\lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

• Busquem el pla que passa per B i és perpendicular a r:

$-4(x - 4) - 3(y - 0) + 2(z - 1) = 0$

π: $-4x - 3y + 2z + 14 = 0$

• Obtenim el punt d'intersecció de r amb π:

$-4(-3 - 4\lambda) - 3(2 - 3\lambda) + 4\lambda + 14 = 0$

$12 + 16\lambda - 6 + 9\lambda + 4\lambda + 14 = 0$

$29\lambda + 20 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = \frac{-20}{29}$

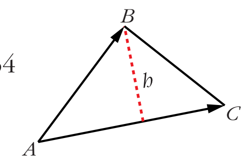
El punt (projecció de B sobre AC) és: $B'\left(\frac{-7}{29}, \frac{118}{29}, \frac{-40}{29}\right)$.

• La longitud del segment és la distància entre B i B':

$$|\overrightarrow{B'B}| = \left|\left(\frac{123}{29}, \frac{-118}{29}, \frac{69}{29}\right)\right| = \sqrt{\frac{33\,814}{841}} = \sqrt{\frac{1\,166}{29}} \approx 6{,}34$$

D'una altra forma:

$$h = \frac{\text{Àrea}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{|(1, 18, 29)|}{\sqrt{16 + 9 + 4}} = \sqrt{\frac{1\,166}{29}} \approx 6{,}34$$



72. **Determina l'equació d'un pla π paral·lel al pla de l'equació $x - 2y + 3z + 6 = 0$ i que dista 12 unitats de l'origen.**

Un pla paral·lel a $x - 2y + 3z + 6 = 0$ és de la forma π: $x - 2y + 3z + k = 0$. Hem de buscar k perquè la distància a l'origen sigui de 12 unitats:

$$dist\,[(0, 0, 0), \pi] = \frac{|k|}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{|k|}{\sqrt{14}} = 12 \quad \begin{cases} k = 12\sqrt{14} \\ k = -12\sqrt{14} \end{cases}$$

Hi ha dos plans: $x - 2y + 3z + 12\sqrt{14} = 0$ i $x - 2y + 3z - 12\sqrt{14} = 0$.

Pàgina 188

73. **Un quadrat té un dels costats sobre la recta $r: \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$ i un altre sobre $s: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+5}{-2}$.**

a) Calcula l'àrea del quadrat.

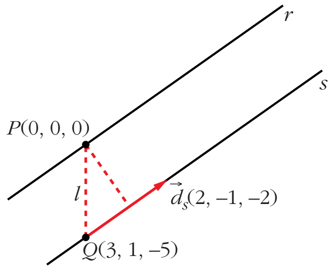
b) Troba quatre punts (dos en r i dos en s) que puguin ser els vèrtexs d'un quadrat, si un d'aquests és (0, 0, 0).

a) Escrivim la recta r en forma paramètrica:

$$(3, 2, 2) \times (1, -2, 2) = (8, -4, -8) \,//\, (2, -1, -2)$$

$$r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \quad \to \quad \vec{d}_r(2, -1, -2);\ P(0, 0, 0)$$

$\vec{d}_s(2, -1, -2)$; les dues rectes tenen la mateixa direcció; a més $P(0, 0, 0) \in r$, però $P(0, 0, 0) \notin s$. Les rectes són paral·leles.



El costat del quadrat és la distància entre les dues rectes.

$$dist\,(r, s) = dist\,(P, s) = \frac{\text{Àrea}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_s|}{|\vec{d}_s|} =$$

$$= \frac{|(-7, -4, -5)|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{\sqrt{90}}{\sqrt{9}} = \sqrt{10} =$$

= costat del quadrat

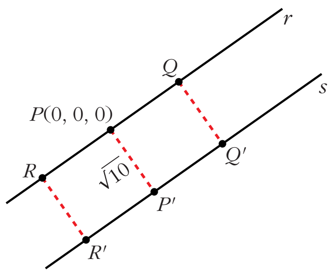
Per tant: Àrea $= (\sqrt{10}\,)^2 = 10$ u^2.

b) Obtenim els vèrtexs que poden estar en r:

Un punt de r és $(2\lambda, -\lambda, -2\lambda)$:

$$dist\,(P, Q) = \sqrt{4\lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda^2} = \sqrt{10} \quad \to$$

$$\to \quad 9\lambda^2 = 10 \quad \to \quad \lambda = \pm\frac{\sqrt{10}}{3}$$



Hi ha dos possibles vèrtexs:

$$Q\left(\frac{2\sqrt{10}}{3}, \frac{-\sqrt{10}}{3}, \frac{-2\sqrt{10}}{3}\right); \quad R\left(\frac{-2\sqrt{10}}{3}, \frac{\sqrt{10}}{3}, \frac{2\sqrt{10}}{3}\right)$$

- Obtenim P': Un punt de s és de la forma: $S(3 + 2\mu, 1 - \mu, -5 - 2\mu)$

$\overrightarrow{PS} \cdot \vec{d}_s = 0 \quad \to \quad (3 + 2\mu, 1 - \mu, -5 - 2\mu) \cdot (2, -1, -2) = 0$

$6 + 4\mu - 1 + \mu + 10 + 4\mu = 0 \quad \to \quad 9\mu = -15 \quad \to \quad \mu = \dfrac{-5}{3}$

$P'\left(\dfrac{-1}{3}, \dfrac{8}{3}, \dfrac{-5}{3}\right)$

- Si $Q'(x, y, z)$, com que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$, aleshores:

$$\left(\frac{2\sqrt{10}}{3}, \frac{-\sqrt{10}}{3}, \frac{-2\sqrt{10}}{3}\right) = \left(x + \frac{1}{3}, y - \frac{8}{3}, z + \frac{5}{3}\right)$$

$$Q'\left(\frac{2\sqrt{10} - 1}{3}, \frac{8 - \sqrt{10}}{3}, \frac{-5 - 2\sqrt{10}}{3}\right)$$

- Si $R'(a, b, c)$, com que $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{P'R'}$, aleshores:

$$\left(\frac{-2\sqrt{10}}{3}, \frac{\sqrt{10}}{3}, \frac{2\sqrt{10}}{3}\right) = \left(a + \frac{1}{3}, b - \frac{8}{3}, c + \frac{5}{3}\right)$$

$$R'\left(\frac{-2\sqrt{10} - 1}{3}, \frac{8 + \sqrt{10}}{3}, \frac{-5 + 2\sqrt{10}}{3}\right)$$

Els dos quadrats són $PQQ'P'$ i $PRR'P'$.

74. Estudia la posició relativa de les rectes r i s i calcula l'angle que formen:

$$r: \frac{x - 1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \qquad s: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = 4 + 3\lambda \end{cases}$$

$\vec{d}_r(2, 3, 4)$; $P(1, 0, 0)$

$\vec{d}_s(1, 2, 3)$; $P'(3, 3, 4)$

$\overrightarrow{PP'}(2, 3, 4) = \vec{d}_r$

Les dues rectes es tallen en el punt $(3, 3, 4)$.

- Angle que formen:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r|\ |\vec{d}_s|} = \frac{2 + 6 + 12}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{14}} = \frac{20}{\sqrt{406}} = 0{,}99 \quad \to \quad \alpha = 6° \ 58' \ 57''$$

75. Si r_1 és la recta que passa per $A(2, 4, 0)$ i $B(6, 2, 0)$, i r_2 la que passa per $C(0, 0, 7)$ i $D(3, 2, 0)$.

Obtén, de manera raonada, la distància entre r_1 i r_2.

- Escrivim les rectes en forma paramètrica:

r_1: $\overrightarrow{AB}(4, -2, 0) \,//\, (2, -1, 0)$

$$r_1: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

r_2: $\overrightarrow{CD}(3, 2, -7)$

$$r_2: \begin{cases} x = 3\mu \\ y = 2\mu \\ z = 7 - 7\mu \end{cases}$$

- Estudiem la posició relativa de r_1 i r_2:

$\overrightarrow{AC}(-2, -4, 7)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & -7 & 7 \end{vmatrix} = -21 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Les rectes s'encreuen.}$$

- Busquem la distància entre r_1 i r_2:

$$dist\,(r_1, r_2) = \frac{\text{Volum del paral·lelepípede}}{\text{Àrea de la base}} = \frac{21}{|(2, -1, 0) \times (3, 2, -7)|} =$$

$$= \frac{21}{|(7, 14, 7)|} = \frac{21}{\sqrt{294}} \approx 1{,}22$$

76. **Troba l'equació general del pla determinat pels punts *A* (1, 1, 1), *B* (–2, 0, –1), *C* (1, –2, 0), i calcula el volum del tetràedre que limita amb els plans cartesians.**

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}(-3, -1, -2) \\ \overrightarrow{AC}(0, -3, -1) \end{array}\right\} \text{Són paral·lels al pla.}$$

L'equació del pla és:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ y-1 & 1 & 3 \\ z-1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad 5x + 3y - 9z + 1 = 0$$

- Vèrtexs del tetràedre: $O(0, 0, 0)$

$$y = z = 0 \rightarrow 5x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{5} \rightarrow A\left(-\frac{1}{5}, 0, 0\right)$$

$$x = z = 0 \rightarrow 3y = -1 \rightarrow y = -\frac{1}{3} \rightarrow B\left(0, -\frac{1}{3}, 0\right)$$

$$x = y = 0 \rightarrow -9z = -1 \rightarrow z = \frac{1}{9} \rightarrow C\left(0, 0, \frac{1}{9}\right)$$

$$\text{Volum} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{810}\ \text{u}^3$$

77. Calcula la distància entre les rectes següents:

$$r: \begin{cases} x - \quad z = -2 \\ \quad y - z = -4 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x - \quad z = 0 \\ \quad y + z = 0 \end{cases}$$

• Escrivim les rectes en forma paramètrica:

$$r: \begin{cases} x - z = -2 & \rightarrow & x = -2 + z \\ y - z = -4 & \rightarrow & y = -4 + z \end{cases} \qquad r: \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = -4 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x - z = 0 & \rightarrow & x = z \\ y + z = 0 & \rightarrow & y = -z \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

• Estudiem la posició relativa de les dues rectes:

$\vec{d}_r(1, 1, 1)$; $P(-2, -4, 0)$

$\vec{d}_s(1, -1, 1)$; $P'(0, 0, 0)$

$\overrightarrow{PP'}(2, 4, 0)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Les rectes s'encreuen.}$$

• Busquem la distància entre les rectes:

$$dist\,(r, s) = \frac{\text{Volum del paral·lelepípede}}{\text{Àrea de la base}} = \frac{4}{|(1, 1, 1) \times (1, -1, 1)|} =$$

$$= \frac{4}{|(2, 0, -2)|} = \frac{4}{\sqrt{4 + 4}} = \frac{4}{\sqrt{8}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$$

78. Tenim els punts $P(5, 1, 3)$ i $Q(3, 7, -1)$. Pel punt mitjà del segment PQ tracem un pla π perpendicular a aquest segment.

Aquest pla talla els eixos coordenats en els punts A, B i C:

a) Escriu l'equació del pla π.

b) Calcula el volum del tetràedre de vèrtexs O, A, B i C (O és l'origen de $\mathbb{R}^3$).

a) El pla és perpendicular a $\overrightarrow{PQ}(-2, 6, -4) \,//\, (1, -3, 2)$. Passa pel punt mitjà del segment PQ: $M = (4, 4, 1)$.

L'equació del pla és: $1(x - 4) - 3(y - 4) + 2(z - 1) = 0$

$$\pi: x - 3y + 2z + 6 = 0$$

b) Busquem els vèrtexs del tetràedre:

$y = z = 0 \;\rightarrow\; x + 6 = 0 \;\rightarrow\; x = -6 \;\rightarrow\; A(-6, 0, 0)$

$x = z = 0 \;\rightarrow\; -3y + 6 = 0 \;\rightarrow\; y = 2 \;\rightarrow\; B(0, 2, 0)$

$x = y = 0 \;\rightarrow\; -2z + 6 = 0 \;\rightarrow\; z = -3 \;\rightarrow\; C(0, 0, -3)$

$\text{Volum} = \frac{1}{6}(6 \cdot 2 \cdot 3) = 6 \text{ u}^3$

79. Troba el punt del pla de l'equació $x - z = 3$ que sigui més proper al punt $P(3, 1, 4)$, com també la distància entre el punt P i el pla donat.

- Busquem l'equació de la recta perpendicular al pla que passa per $P(3, 1, 4)$:

$$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 4 - \lambda \end{cases}$$

- El punt que busquem és el punt de tall de r i el pla:

$(3 + \lambda) - (4 - \lambda) = 3$

$3 + \lambda - 4 + \lambda = 3 \;\rightarrow\; 2\lambda = 4 \;\rightarrow\; \lambda = 2$

El punt és $P'(5, 1, 2)$.

- La distància entre P i el pla és igual a la distància entre P i P':

$$dist\,(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = |(2, 0, -2)| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} \approx 2{,}83$$

80. Es consideren els punts $P(2, 1, -1)$, $Q(1, 4, 1)$ i $R(1, 3, 1)$:

a) Comprova que no estan alineats i troba l'àrea del triangle que determinen.

b) Si des del punt $V(1, 1, -1)$ es tracen rectes a cada un dels punts P, Q i R, s'obté una piràmide. Troba l'altura d'aquesta piràmide i el seu volum.

a) $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}(-1, 3, 2) \\ \overrightarrow{PR}(-1, 2, 2) \end{array}\right\}$ No té les coordenades proporcionals; per tant els punts no estan alineats.

$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (2, 0, 1) \;\rightarrow\; |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

$\text{Àrea} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}12 \text{ u}^2$

b) L'altura és la distància de V al pla determinat per P, Q i R.

Un vector normal al pla és $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (2, 0, 1)$. L'equació del pla és:

$2(x - 2) + 1(z + 1) = 0$

$\pi\!: 2x + z - 3 = 0$

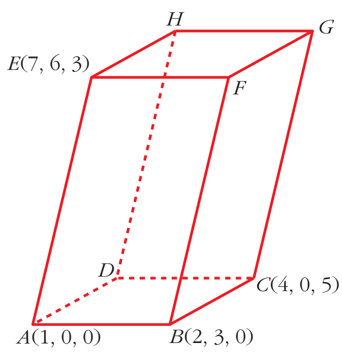
$$\text{Altura} = dist\,(V, \pi) = \frac{|2 - 1 - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Volum} = \frac{1}{3}\,[\text{Àrea base} \times \text{altura}] = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 1 \text{ u}^3$$

81. **Troba el volum d'un paral·lelepípede de bases $ABCD$ i $EFGH$ si sabem que $A(1, 0, 0)$, $B(2, 3, 0)$, $C(4, 0, 5)$ i $E(7, 6, 3)$.**

Troba les coordenades dels vèrtexs restants del paral·lelepípede.

Busquem les coordenades dels vèrtexs restants:



• Vèrtex $D(d_1, d_2, d_3)$:

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \rightarrow (-1, -3, 0) = (d_1 - 4, d_2, d_3 - 5)$

$D(3, -3, 5)$

• Vèrtex $F(f_1, f_2, f_3)$:

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} \rightarrow (6, 6, 3) = (f_1 - 2, f_2 - 3, f_3)$

$F(8, 9, 3)$

• Vèrtex $G(g_1, g_2, g_3)$ i vèrtex $H(h_1, h_2, h_3)$:

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG} \rightarrow (6, 6, 3) = (g_1 - 4, g_2, g_3 - 5) \rightarrow G(10, 6, 8)$

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH} \rightarrow (6, 6, 3) = (h_1 - 3, h_2 + 3, h_3 - 5) \rightarrow H(9, 3, 8)$

$\overrightarrow{AB}(1, 3, 0)\ \ \overrightarrow{AD}(2, -3, 5),\ \ \overrightarrow{AE}(6, 6, 3)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}] = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \\ 6 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 33 \rightarrow \text{Volum} = 33 \text{ u}^3$$

82. **Donades les rectes**

$$r: \frac{x - 1}{1} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z - 2}{1} \qquad s: \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - y - z = -4 \end{cases}$$

determina la posició relativa d'ambdues rectes i l'àrea d'un dels quadrats, dos dels costats del qual estan sobre r i s.

• Escrivim la recta s en forma paramètrica:

$$\left.\begin{array}{l} -y + z = 2 - x \\ -y - z = -4 - 3x \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Sumant: } -2y = -2 - 4x \rightarrow y = 1 + 2x \\ z = 2 - x + y = 3 + x \end{array}$$

$$s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

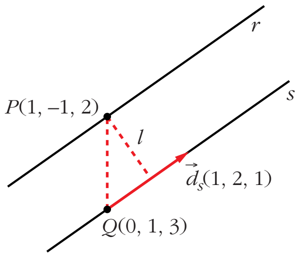
• Estudiem la posició relativa de les dues rectes:

$\vec{d}_r(1, 2, 1)$; $P(1, -1, 2)$

$\vec{d}_s(1, 2, 1)$; $Q(0, 1, 3)$

Les rectes tenen la mateixa direcció; $P \in r$, però $P \notin s$; per tant les rectes r i s són paral·leles.

• El costat del quadrat és igual a la distància entre les rectes r i s.



$\overrightarrow{QP}(1, -2, -1)$

$\overrightarrow{QP} \times \vec{d}_s = (1, -2, -1) \times (1, 2, 1) = (0, -2, 4)$

$$dist\,(r, s) = dist\,(P, s) = \frac{|\overrightarrow{QP} \times \vec{d}_s|}{|\vec{d}_s|} = \frac{|(0, -2, 4)|}{|(1, 2, 1)|} =$$

$$= \frac{\sqrt{4 + 16}}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \sqrt{\frac{20}{6}} = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

• L'àrea del quadrat és:

$$\text{Àrea} = \left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right)^2 = \frac{10}{3} \ \text{u}^2$$

83. **Donades les rectes r i s:**

$$r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1} \qquad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

troba els punts que donen la mínima distància i determina l'equació de la perpendicular comuna a r i s.

Un punt genèric de r és $R(3 + 2\lambda, \lambda, 1 + \lambda)$.

Un punt genèric de s és $S(\mu, -\mu, -\mu)$.

Un vector genèric d'origen en r i extrem en s és:

$\overrightarrow{RS}(-3 - 2\lambda + \mu, -\lambda - \mu, -1 - \lambda - \mu)$

Aquest vector ha de ser perpendicular a r i a s:

$$\begin{cases} \overrightarrow{RS} \cdot (2, 1, 1) = 0 \ \rightarrow \ -6\lambda - 7 = 0 \ \rightarrow \ \lambda = -\dfrac{7}{6} \\[2ex] \overrightarrow{RS} \cdot (1, -1, -1) = 0 \ \rightarrow \ -2 + 3\mu = 0 \ \rightarrow \ \mu = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Els punts que donen la mínima distància són:

$$R\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}\right) \text{ i } S\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

La perpendicular comuna és la recta que passa per R i S:

$$\overrightarrow{RS}\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow \vec{d}(0, 1, -1)$$

La recta és: $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = -\dfrac{7}{6} + \lambda \\ z = -\dfrac{1}{6} - \lambda \end{cases}$

84. **Troba l'equació de la projecció ortogonal r' de la recta $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{2}$ sobre el pla $\alpha: x - 3y + 2z + 12 = 0$.**

La projecció ortogonal de r sobre α és la recta intersecció del pla α amb un altre pla π, perpendicular a α i que conté r.

$$P(1, 1, 2); \ \vec{d}_r(2, 1, 2); \ \vec{n}(1, -3, 2)$$

$$\vec{d}_r \times \vec{n} = (2, 1, 2) \times (1, -3, 2) = (8, -2, -7)$$

L'equació de π és: $8(x-1) - 2(y-1) - 7(z-2) = 0$

$\pi: 8x - 2y - 7z + 8 = 0$

La projecció ortogonal de r sobre α és:

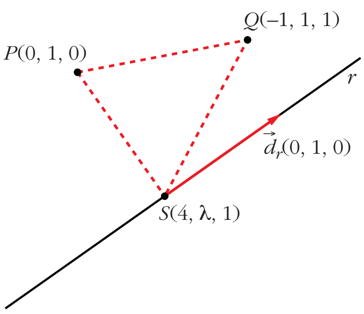
$$r': \begin{cases} x - 3y + 2z + 12 = 0 \\ 8x - 2y - 7z + 8 = 0 \end{cases}$$

Pàgina 189

85. **Els punts $P(0, 1, 0)$ i $Q(-1, 1, 1)$ són dos vèrtexs d'un triangle, i el tercer, S, pertany a la recta $r: \begin{cases} x = 4 \\ z = 1 \end{cases}$. La recta que conté P i S és perpendicular a la recta r.**

a) Determina les coordenades de S.

b) Calcula l'àrea del triangle PQS.



a) $\overrightarrow{PS} \perp \vec{d}_r \rightarrow \overrightarrow{PS} \cdot \vec{d}_r = 0$

$(4, \lambda - 1, 1) \cdot (0, 1, 0) = \lambda - 1 = 0 \rightarrow \lambda = 1$

$S(4, 1, 1)$

b) $\overrightarrow{PS}(4, 0, 1)$ $\overrightarrow{PQ}(-1, 0, 1)$

$\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{PQ} = (4, 0, 1) \times (-1, 0, 1) = (0, -5, 0)$

$$\text{Àrea} = \frac{|\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{PQ}|}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ u}^2$$

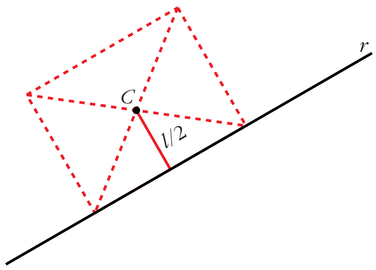
86. **Considera un quadrat el centre del qual és el punt $C(1, 1, -1)$ i té un dels costats en la recta:**

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0}$$

a) Troba l'equació del pla en què es troba el quadrat.

b) Calcula la longitud del costat del quadrat.

a) És el pla, π, que conté C i r. $\vec{d}_r(1, 1, 0)$; $P(2, 1, 1) \in r$.



$C(1, 1, -1)$

$\overrightarrow{PC}(-1, 0, -2) \ // \ \pi$

Un vector normal al pla és:

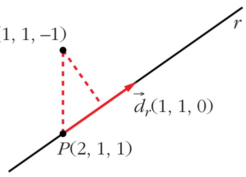
$\vec{n} = (1, 1, 0) \times (1, 0, 2) = (2, -2, -1)$

L'equació del pla és:

$2(x-1) - 2(y-1) - 1(z+1) = 0$

$2x - 2y - z - 1 = 0$

b) La distància de C a r és la meitat del costat del quadrat.



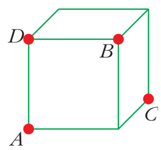
$\vec{d}_r \times \overrightarrow{PC} = (1, 1, 0) \times (-1, 0, -2) = (-2, 2, 1)$

$|\vec{d}_r| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$dist\,(C, r) = \frac{|\vec{d}_r \times \overrightarrow{PC}|}{|\vec{d}_r|} = \frac{\sqrt{4+4+1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

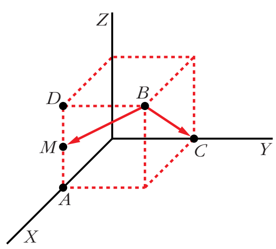
$\frac{l}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \rightarrow$ costat del quadrat $= l = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$

87. **En la figura adjunta, calcula l'angle que forma la recta BC amb la recta que uneix B amb el punt mitjà del costat AD.**



Considerem el cub de costat 1 amb un vèrtex en l'origen:

Així: $A(1, 0, 0)$ $B(1, 1, 1)$ $C(0, 1, 0)$ $D(1, 0, 1)$ $M\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$



$\overrightarrow{BC}(-1, 0, -1)$; $\overrightarrow{BM}\left(0, -1, -\frac{1}{2}\right)$

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}|\,|\overrightarrow{BM}|} = \frac{1/2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5/4}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0{,}316 \rightarrow \alpha = 71° \ 33' \ 54''$$

88. **Sigui la recta r: $\begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 \\ x + y \quad\quad - 1 = 0 \end{cases}$**

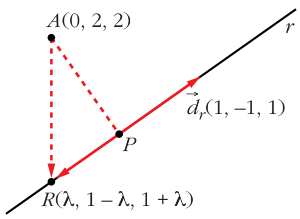
a) Determina l'equació de la recta s que talla perpendicularment r i passa per (0, 2, 2), i les coordenades del punt P, intersecció de r i s.

b) Troba l'equació del pla π que conté r i s i la de la recta t perpendicular a π pel punt P.

c) Si Q és qualsevol punt de t, explica, sense fer cap càlcul, quina relació hi ha entre les distàncies de Q a r, a s i a π.

a) Escrivim r en forma paramètrica:

$$\left.\begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 & \rightarrow \quad z = 3x + 2y - 1 = 1 + x \\ x + y \quad\quad - 1 = 0 & \rightarrow \quad y = 1 - x \end{cases}\right\} \quad r\!: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$



Un punt genèric de r és $R(\lambda, 1 - \lambda, 1 + \lambda)$.

$\overrightarrow{AR}$ ha de ser perpendicular a r, és a dir: $\overrightarrow{AR} \cdot \vec{d}_r = 0$

$$(\lambda, -1 - \lambda, -1 + \lambda) \cdot (1, -1, 1) = 0$$

$$\lambda + 1 + \lambda - 1 + \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad 3\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 0$$

$$R(0, 1, 1)$$

La recta s passa per $A(0, 2, 2)$ i per $R(0, 1, 1)$.

$$\overrightarrow{RA}(0, 1, 1) \quad \rightarrow \quad s\!: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

El punt d'intersecció de r i s és $P(0, 1, 1)$.

b) Equació del pla π que conté r i s:

$$\vec{n} = (1, -1, 1) \times (0, 1, 1) = (-2, -1, 1); \quad P(0, 1, 1) \in \pi$$

$$-2(x - 0) - 1(y - 1) + 1(z - 1) = 0$$

$$\pi\!: -2x - y + z = 0$$

Equació de la recta t perpendicular a π pel punt P:

$$t\!: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

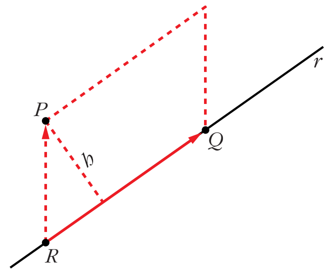
c) Si $Q \in t \quad \rightarrow \quad dist\,(Q, r) = dist\,(Q, s) = dist\,(Q, \pi) = dist\,(Q, P)$

Les tres distàncies coincideixen amb la distància de Q al punt P, per tant les tres són iguals entre si.

89. **a) Troba la distància del punt $P(1, -1, 3)$ a la recta que passa pels punts $Q(1, 2, 1)$ i $R(1, 0, -1)$.**

b) Troba tots els punts S del pla determinat per P, Q i R de manera que el quadrilàter de vèrtexs P, Q, R i S sigui un paral·lelogram.

a) Si r és la recta que passa per R i per Q, aleshores:

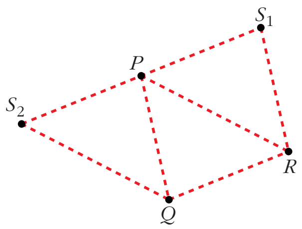


$$dist\,(P, r) = \frac{\text{Àrea}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{RQ}|}{|\overrightarrow{RQ}|}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{RP}(0, -1, 4) \\ \overrightarrow{RQ}(0, 2, 2) \end{array}\right\} \quad \overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{RQ} = (-10, 0, 0)$$

$$dist\,(P, r) = \frac{|(-10, 0, 0)|}{|(0, 2, 2)|} = \frac{10}{\sqrt{4+4}} = \frac{10}{\sqrt{8}} = \frac{10}{2\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3{,}54\text{u}$$

b) Hi ha dues possibilitats: que P i Q siguin vèrtexs consecutius, o que ho siguin P i R.



- Si P i Q són consecutius, obtenim $S_1(x, y, z)$:

  $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{RS_1} \quad \rightarrow \quad (0, -3, 2) = (x - 1, y, z + 1)$

  $S_1(1, -3, 1)$

- Si P i R són consecutius, obtenim $S_2(a, b, c)$:

  $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{QS_2} \quad \rightarrow \quad (0, -1, 4) = (a - 1, b - 2, c - 1)$

  $S_2(1, 1, 5)$

90. **Donades la rectes:** $r: \begin{cases} x = 1 + a(y - 2) \\ x = z \end{cases} \quad s: \begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ ax - z = 2a - 2 \end{cases}$

a) Esbrina'n la posició relativa segons els valors de a.

b) Si $a = 0$, determina els punts $P \in r$ i $Q \in s$ de manera que la distància entre P i Q sigui mínima.

a) Escrivim r i s en forma paramètrica, obtenint un punt i un vector direcció de cada una d'elles:

$$r: \begin{cases} x = 1 + a(y - 2) & \rightarrow \quad x - ay + (2a - 1) = 0 \\ x = z & \rightarrow \quad x - z = 0 \end{cases}$$

Vector direcció: $\vec{d}_r = (1, -a, 0) \times (1, 0, -1) = (a, 1, a)$

Punt: $y = 2 \quad \rightarrow \quad x = z = 1 \quad \rightarrow \quad P(1, 2, 1)$

$$r: \begin{cases} x = 1 + a\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 + a\lambda \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ ax \quad - z \quad = 2a - 2 \end{cases}$$

Vector direcció: $\vec{d}_s = (0, 1, -1) \times (a, 0, -1) = (-1, -a, -a)$

Punt: $x = z = 2 \rightarrow y = 1 \rightarrow P'(2, 1, 2)$

$$s: \begin{cases} x = 2 - \mu \\ y = 1 - a\mu \\ z = 2 - a\mu \end{cases}$$

- Estudiem la seva posició relativa:

$\vec{d}_r(a, 1, a)$ $\vec{d}_s(-1, -a, -a)$ $\overrightarrow{PP'}(1, -1, 1)$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & -a & -a \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

- Si $a = 1$: $M' = [\vec{d}_r | \vec{d}_s | \overrightarrow{PP'}]$; $M = [\vec{d}_r | \vec{d}_s]$

$$M' = \Big(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{matrix}}_{M} \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}\Big)$$

$ran\,(M') = 2$ $ran\,(M) = 1$

Les rectes són paral·leles.

- Si $a = -1$:

$$M' = \Big(\underbrace{\begin{matrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix}}_{M} \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}\Big)$$

$ran\,(M) = 2 = ran\,(M')$

Les rectes es tallen en un punt, són secants.

- Si $a \neq 1$ i $a \neq -1 \rightarrow ran\,(M') = 3 \rightarrow$ Les rectes s'encreuen.

b) Agafant $a = 0$ (les rectes s'encreuen), tenim que:

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2 - \mu \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Un punt genèric de r és $R(1, 2 + \lambda, 1)$.

Un punt genèric de s és $S(2 - \mu, 1, 2)$.

Un vector genèric amb origen en r i extrem en s és: $\overrightarrow{RS}(1 - \mu, -1 - \lambda, 1)$.

Aquest vector ha de ser perpendicular a $\vec{d}_r$ i a $\vec{d}_s$:

$\overrightarrow{RS} \cdot \vec{d}_r = 0 \rightarrow (1 - \mu, -1 - \lambda, 1) \cdot (0, 1, 0) = 0 \rightarrow -1 - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = -1$

$\overrightarrow{RS} \cdot \vec{d}_s = 0 \rightarrow (1 - \mu, -1 - \lambda, 1) \cdot (-1, 0, 0) = 0 \rightarrow -1 + \mu = 0 \rightarrow \mu = 1$

Els punts són $P(1, 1, 1)$ i $Q(1, 1, 2)$.

91. **Siguin A, B i C els punts de la recta: $r: x-12 = \dfrac{y+6}{2} = \dfrac{z-6}{3}$ que estan en els plans coordenats $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.**

a) Determina, raonadament, quin dels tres punts es troba entre els altres dos.

b) Si D és un punt exterior a la recta, indica, raonadament, quin dels triangles DAB, DAC o DBC té major àrea.

a) Obtenim les coordenades dels punts A, B i C:

$$x = 0 \ \to \ \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{y+6}{2} = -12 \ \to \ y = -30 \\ \dfrac{z-6}{3} = -12 \ \to \ z = -30 \end{array} \right\} A(0, -30, -30)$$

$$y = 0 \ \to \ \left\{ \begin{array}{l} x - 12 = 3 \ \to \ x = 15 \\ \dfrac{z-6}{3} = 3 \ \to \ z = 15 \end{array} \right\} B(15, 0, 15)$$

$$z = 0 \ \to \ \left\{ \begin{array}{l} x - 12 = -2 \ \to \ x = 10 \\ \dfrac{y+6}{2} = -2 \ \to \ y = -10 \end{array} \right\} C(10, -10, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (15, 30, 45) = 15(1, 2, 3) \\ \overrightarrow{AC} = (10, 20, 30) = 10(1, 2, 3) \end{array} \right\}$$

Tenen el mateix sentit i $|\overrightarrow{AC}| < |\overrightarrow{AB}| \ \to$
$\to$ C està entre A i B.

b) L'altura dels tres triangles és la mateixa en els tres casos, ja que és igual a la distància de D a r. Tindrà una àrea més gran el que tingui una base més gran. Com que C està entre A i B, el de base més gran és el que té com a base AB; és a dir, el triangle d'àrea més gran és DAB.

92. **Troba el pla de la família: $mx + y + z - (m+1) = 0$ que està situat a distància 1 de l'origen.**

Busquem la distància de l'origen, (0, 0, 0), al pla i la igualem a 1:

$$dist = \frac{|m \cdot 0 + 0 + 0 - (m+1)|}{\sqrt{m^2 + 1 + 1}} = \frac{|m+1|}{\sqrt{m^2+2}} = 1$$

$$|m+1| = \sqrt{m^2+2} \ \to \ (m+1)^2 = m^2 + 2 \ \to \ m^2 + 1 + 2m = m^2 + 2$$

$$2m = 1 \ \to \ m = \frac{1}{2}$$

El pla és: $\dfrac{1}{2}x + y + z - \dfrac{3}{2} = 0$; és a dir: $x + 2y + 2z - 3 = 0$.

93. **Troba el lloc geomètric dels punts $P(x, y, z)$ que equidisten dels punts $A(1, -1, 0)$ i $B(2, 3, -4)$. Comprova que obtens un pla perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ i que passa pel punt mitjà de AB.**

Si $P(x, y, z)$ és un punt del lloc geomètric: $dist(P, A) = dist(P, B) \rightarrow$

$\rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2}$

$\cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} + 2y + 1 + \cancel{z^2} = \cancel{x^2} - 4x + 4 + \cancel{y^2} - 6y + 9 + \cancel{z^2} + 8z + 16$

π: $2x + 8y - 8z - 27 = 0 \rightarrow$ Equació d'un pla.

- Veiem que π és perpendicular a $\overrightarrow{AB}$:

  $\overrightarrow{AB} = (1, 4, -4)$

  Vector normal al pla $\rightarrow \vec{n}(2, 8, -8) \parallel \overrightarrow{AB}$

  Per tant $\overrightarrow{AB} \perp \pi$.

- Comprovem que π passa pel punt mitjà de AB:

  $$M = \left(\frac{1+2}{2}, \frac{-1+3}{2}, \frac{0-4}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 1, -2\right)$$

  $$2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + 8 \cdot 1 - 8 \cdot (-2) - 27 = 0 \rightarrow M \in \pi$$

- El pla π és el *pla mediador del segment AB.*

94. **Troba el lloc geomètric dels punts que equidisten dels plans següents:**

α: $3x + y - 2z + 1 = 0$

β: $x - 3y + 2z - 3 = 0$

☛ ***Hi ha dues solucions. Són els plans bisectors del díedre que determinen α i β.***

Si $P(x, y, z)$ és un punt del lloc geomètric:

$$dist(P, \alpha) = dist(P, \beta) \rightarrow \frac{|3x + y - 2z + 1|}{\sqrt{9+1+4}} = \frac{|x - 3y + 2z - 3|}{\sqrt{1+9+4}}$$

$$|3x + y - 2z + 1| = |x - 3y + 2z - 3|$$

$3x + y - 2z + 1 = x - 3y + 2z - 3 \rightarrow 2x + 4y - 4z + 4 = 0 \rightarrow x + 2y - 2z + 2 = 0$

$3x + y - 2z + 1 = -x + 3y - 2z + 3 \rightarrow 4x - 2y - 2 = 0 \rightarrow 2x - y - 1 = 0$

Són els *plans bisectors del díedre que determinen* α *i* β.

95. **Troba les equacions del lloc geomètric de tots els punts del pla $x = y$ que disten 1 del pla $2x - y + 2z = 2$.**

Si P és un punt del pla $x = y$, aleshores és de la forma $P(x, x, z)$. La distància de P al pla donat ha de ser igual a 1, és a dir:

$$\frac{|2x - x + 2z - 2|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|x + 2z - 2|}{3} = 1$$

$$|x + 2z - 2| = 3 \begin{cases} x + 2z - 2 = 3 \rightarrow x + 2z - 5 = 0 \\ x + 2z - 2 = -3 \rightarrow x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Són dues rectes: $r: \begin{cases} x + 2z - 5 = 0 \\ x = y \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x + 2z + 1 = 0 \\ x = y \end{cases}$

Pàgina 190

96. **a) Troba el lloc geomètric dels punts que equidisten dels plans d'equacions $3x - 4y + 5 = 0$ i $2x - 2y + z + 9 = 0$.**

b) Quins punts de l'eix OY equidisten d'ambdós plans?

a) Si $P(x, y, z)$ és un dels punts del lloc geomètric, aleshores:

$$\frac{|3x - 4y + 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|2x - 2y + z + 9|}{\sqrt{4 + 4 + 1}}$$

$$\frac{|3x - 4y + 5|}{5} = \frac{|2x - 2y + z + 9|}{3}$$

$$3|3x - 4y + 5| = 5|2x - 2y + z + 9|$$

$$\begin{cases} 9x - 12y + 15 = 10x - 10y + 5z + 45 \rightarrow x + 2y + 5z + 30 = 0 \\ 9x - 12y + 15 = -10x + 10y - 5z - 45 \rightarrow 19x - 22y + 5z + 60 = 0 \end{cases}$$

Són els plans bisectors del díedre que determinen els dos plans donats.

b) Un punt de l'eix OY és de la forma $Q(0, y, 0)$. La distància de Q a cada un dels plans ha de ser la mateixa, és a dir:

$$\frac{|-4y + 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-2y + 9|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} \rightarrow \frac{|-4y + 5|}{5} = \frac{|-2y + 9|}{3}$$

$$3|-4y + 5| = 5|-2y + 9|$$

$$\begin{cases} -12y + 15 = -10y + 45 \rightarrow -2y = 30 \rightarrow y = -15 \\ -12y + 15 = 10y - 45 \rightarrow -22y = -60 \rightarrow y = \dfrac{30}{11} \end{cases}$$

Hi ha dos punts: $Q_1(0, -15, 0)$ i $Q_2\left(0, \dfrac{30}{11}, 0\right)$.

97. Calcula el conjunt de punts de $\mathbb{R}^3$ que estan a igual distància de $P(-1, 2, 5)$ i $Q(-3, 4, 1)$. A quina distància es troba el punt P d'aquest conjunt?

Si $A(x, y, z)$ és un punt del conjunt, la seva distància a P i a Q ha de ser la mateixa, és a dir: $dist\,(A, P) = dist\,(A, Q) \rightarrow$

$$\rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2}$$

$$\cancel{x^2} + 2x + 1 + \cancel{y^2} - 4y + 4 + \cancel{z^2} - 10z + 25 =$$

$$= \cancel{x^2} + 6x + 9 + \cancel{y^2} - 8y + 16 + \cancel{z^2} - 2z + 1 \rightarrow -4x + 4y - 8z + 4 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \pi\!: x - y + 2z - 1 = 0$$

És el *pla mediador* del segment que uneix P i Q.

La distància de P a aquest pla serà igual a la meitat de la distància entre P i Q:

$$dist\,(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(-2, 2, -4)| = \sqrt{4 + 4 + 16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \rightarrow$$

$$\rightarrow dist\,(P, \pi) = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6} \approx 2{,}45$$

98. Troba l'equació de l'esfera que passa per:

$A(1, 1, 1)$, $B(1, 2, 1)$, $C(1, 1, 2)$, $D(2, 1, 1)$

L'equació és de la forma $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$.

Substituïm cada un dels quatre punts en l'equació:

$$\left.\begin{array}{l} 1 + 1 + 1 + a + b + c + d = 0 \rightarrow a + b + c + d = -3 \\ 1 + 4 + 1 + a + 2b + c + d = 0 \rightarrow a + 2b + c + d = -6 \\ 1 + 1 + 4 + a + b + 2c + d = 0 \rightarrow a + b + 2c + d = -6 \\ 4 + 1 + 1 + 2a + b + c + d = 0 \rightarrow 2a + b + c + d = -6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -3 \\ b = -3 \\ c = -3 \\ d = 6 \end{array}$$

L'equació és: $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0$.

99. a) Troba l'equació del pla perpendicular a l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ en el punt $P(1, 2, 1)$.

b) Quin és el punt diametralment oposat a P en l'esfera donada?

a) El punt P és un punt de l'esfera.

El centre de l'esfera és $C(1, 2, 0)$.

El pla que busquem passa per P i és perpendicular al vector $\overrightarrow{CP}(0, 0, 1)$. La seva equació és: $0 \cdot (x-1) + 0 \cdot (y-2) + 1 \cdot (z-1) = 0$, és a dir: $z - 1 = 0$.

b) És el simètric de P respecte del centre de l'esfera. Si anomenem $P'(x, y, z)$ el punt que busquem, C és el punt mitjà del segment PP', és a dir:

$$\left(\frac{1+x}{2}, \frac{2+y}{2}, \frac{1+z}{2}\right) = (1, 2, 0) \rightarrow P'(1, 2, -1)$$

100. Troba l'equació de l'esfera tangent als plans $x - 2z - 8 = 0$ i $2x - z + 5 = 0$ i que té el centre en la recta:

$$r: \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

El centre de l'esfera és de la forma $C(-2, 0, z)$ (ja que pertany a la recta r).

La distància del centre a cada un dels plans és la mateixa. A més, aquesta distància és el radi de l'esfera:

$$\frac{|-2 - 2z - 8|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{|-4 - z + 5|}{\sqrt{4 + 1}} \rightarrow \frac{|-2z - 10|}{\sqrt{5}} = \frac{|-z + 1|}{\sqrt{5}}$$

$$|-2z - 10| = |-z + 1|$$

$$-2z - 10 = -z + 1 \rightarrow z = -11 \rightarrow C_1(-2, 0, -11)$$

$$-2z - 10 = z - 1 \rightarrow -3z = 9 \rightarrow z = -3 \rightarrow C_2(-2, 0, -3)$$

Hi ha dues solucions:

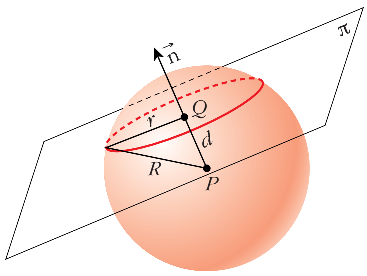
1.ª) $C_1(-2, 0, -11) \rightarrow$ Radi $= \dfrac{12}{\sqrt{5}}$

Equació: $(x + 2)^2 + y^2 + (z + 11)^2 = \dfrac{144}{5}$

2.ª) $C_2(-2, 0, -3) \rightarrow$ Radi $= \dfrac{4}{\sqrt{5}}$

Equació: $(x + 2)^2 + y^2 + (z + 3)^2 = \dfrac{16}{5}$

101. L'esfera $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 25$ talla el pla $2x - 2y + z - 2 = 0$ en una circumferència. Troba'n el centre i el radi.



- Obtinguem el centre de la circumferència:

  — El centre de l'esfera és $P(3, -2, 1)$.

  — La recta que passa per P i és perpendicular al pla és:

$$\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

  — El punt de tall d'aquesta recta amb el pla donat és el centre de la circumferència:

$$2(3 + 2\lambda) - 2(-2 - 2\lambda) + (1 + \lambda) - 2 = 0$$

$$6 + 4\lambda + 4 + 4\lambda + 1 + \lambda - 2 = 0 \rightarrow 9\lambda + 9 = 0 \rightarrow \lambda = -1$$

$Q(1, 0, 0)$

• Calculem el radi de la circumferència:

La distància entre els centres P i Q és:

$$d = |\overrightarrow{QP}| = |(2, -2, 1)| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$$

El radi de l'esfera és $R = 5$.

Així doncs el radi de la circumferència és: $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$.

102. a) Troba l'equació de l'esfera que passa pels punts $A(4, 1, -3)$ i $B(3, 2, 1)$ i que té el centre en la recta:

$$\frac{x - 8}{2} = \frac{y - 3}{1} = \frac{z + 4}{-1}$$

b) Quina és l'equació del pla tangent en B a aquesta esfera?

a) Escrivim la recta en paramètriques:

$$\begin{cases} x = 8 + 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -4 - \lambda \end{cases}$$

Com que el centre pertany a aquesta recta, és de la forma $C(8 + 2\lambda, 3 + \lambda, -4 - \lambda)$. La distància de C als punts A i B ha de ser la mateixa. A més, aquesta distància és el radi de l'esfera:

$$dist\,(A, C) = dist\,(B, C) \;\to\; |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$$

$$|(2\lambda + 4, \lambda + 2, -\lambda - 1)| = |(2\lambda + 5, \lambda + 1, -\lambda - 5)|$$

$$\sqrt{(2\lambda + 4)^2 + (\lambda + 2)^2 + (-\lambda - 1)^2} = \sqrt{(2\lambda + 5)^2 + (\lambda + 1)^2 + (-\lambda - 5)^2}$$

$$\cancel{4\lambda^2} + 16 + 16\lambda + \cancel{\lambda^2} + 4 + 4\lambda + \cancel{\lambda^2} + 1 + 2\lambda =$$

$$= \cancel{4\lambda^2} + 25 + 20\lambda + \cancel{\lambda^2} + 1 + 2\lambda + \cancel{\lambda^2} + 25 + 10\lambda$$

$$-10\lambda = 30 \;\to\; \lambda = -3 \;\to\; C(2, 0, -1)$$

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = 3 = \text{radi de l'esfera.}$$

L'equació és: $(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 9$, o bé:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z - 4 = 0$$

b) Un vector normal al pla és $\overrightarrow{CB} = (1, 2, 2)$.

El pla passa per $B(3, 2, 1)$. La seva equació és:

$$1 \cdot (x - 3) + 2 \cdot (y - 2) + 2 \cdot (z - 1) = 0$$

$$x - 3 + 2y - 4 + 2z - 2 = 0$$

$$x + 2y + 2z - 9 = 0$$

103. **Troba el lloc geomètric dels punts la distància a $A(-2, 3, 4)$ dels quals sigui el doble de la distància a $B(3, -1, -2)$.**

Si $P(x, y, z)$ és un punt del lloc geomètric, ha de complir:

$dist\,(P, A) = 2dist\,(P, B)$

$\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2} = 2\sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2}$

$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 8z + 16 = 2[x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 + z^2 + 4z + 4]$

$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 8z + 29 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 12x + 4y + 8z + 28$

$x^2 + y^2 + z^2 - 16x + 10y + 16z - 1 = 0$

És una esfera de centre $(8, -5, -8)$ i radi $\sqrt{154} \approx 12{,}4$.

104. **Donats $A(4, 2, 0)$ i $B(2, 6, -4)$, troba el lloc geomètric dels punts P de manera que $\overline{PA}$ sigui perpendicular a $\overline{PB}$.**

Si $P(x, y, z)$ és un punt del lloc geomètric:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AP}\,(x-4,\ y-2,\ z) \\ \overrightarrow{BP}\,(x-2,\ y-6,\ z+4) \end{array}\right\}\ \text{han de ser perpendiculars, és a dir:}$$

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \quad \rightarrow \quad (x-4)(x-2) + (y-2)(y-6) + z(z+4) = 0$

$x^2 - 6x + 8 + y^2 - 8y + 12 + z^2 + 4z = 0$

$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y + 4z + 20 = 0$

És una esfera de centre $(3, 4, -2)$ i radi 3.

QÜESTIONS TEÒRIQUES

105. **L'equació $ax + by + cz + d = 0$ representa un pla de l'espai. Explica quina característica té aquest pla en cada un d'aquests casos:**

I) $a = 0,\ b = 0$ **II)** $b = 0,\ c = 0$

III) $a = 0,\ c = 0$ **IV)** $d = 0$

I) És perpendicular a l'eix OZ. (Paral·lel al pla OXY.)

II) És perpendicular a l'eix OX. (Paral·lel al pla OYZ.)

III) És perpendicular a l'eix OY. (Paral·lel al pla OXZ.)

IV) Passa per l'origen, $(0, 0, 0)$.

106. Defineix la projecció ortogonal d'un punt P sobre un pla π i explica el procediment que empraries per obtenir-la.

- La projecció ortogonal d'un punt, P, sobre un pla, π, és un punt, P', tal que el vector $\overrightarrow{PP'}$ és perpendicular a π. Un procediment per obtenir P' seria el següent:

  Es busca la recta, r, perpendicular a π que passa per P. El punt de tall entre r i π és el punt buscat, P'.

107. Donada una recta r i un punt P d'aquesta, quantes rectes perpendiculars a r que passen pel punt P es poden traçar?

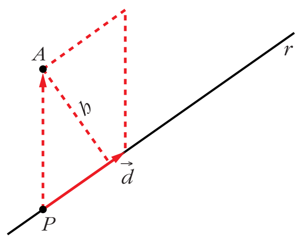
Infinites. Totes les que, passant per P, estan contingudes en el pla perpendicular a r que passa per P.

108. Donat el pla $\pi: x - 3y + 2z - 1 = 0$, escriu les condicions que han de complir les coordenades d'un vector $\vec{v}(a, b, c)$ perquè tingui la direcció d'alguna recta continguda en el pla.

$\vec{v}(a, b, c)$ ha de ser perpendicular al vector normal del pla π, $\vec{n}(1, -3, 2)$; és a dir: $(a, b, c) \cdot (1, -3, 2) = a - 3b + 2c = 0$.

109. Justifica que la distància del punt $A(x_2, y_2, z_2)$ a la recta $\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$ es pot calcular mitjançant la fórmula:

$$d(A, r) = \frac{|(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \times (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



Anomenem $P(x_1, y_1, z_1)$ i $\vec{d}(a, b, c)$. P és un punt de la recta i $\vec{d}$ un vector direcció d'aquesta.

La distància de A a la recta r és igual a l'altura del paral·lelogram determinat per $\overrightarrow{PA}$ i $\vec{d}$, és a dir:

$$dist(A, r) = \frac{\text{Àrea paral·lelogram}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} =$$

$$= \frac{|(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \times (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

110. Siguin r la recta determinada pel punt A i el vector $\vec{d}_r$ i s la recta determinada pel punt B i el vector $\vec{d}_s$. Sabem que r i s s'encreuen.

a) Justifica que la distància entre r i s es pot calcular així:

$$d(r, s) = \frac{\left|[\overrightarrow{AB}, \vec{d}_r, \vec{d}_s]\right|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}$$

b) Justifica que la perpendicular comuna a r i s es pot obtenir així:

$$\begin{cases} det\,(\overrightarrow{AX}, \vec{d}_r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \\ det\,(\overrightarrow{BX}, \vec{d}_s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \end{cases}$$

a) *dist* (r, s) = altura del paral·lelepípede determinat per:

$$\overrightarrow{AB},\ \vec{d}_r \text{ i } \vec{d}_s = \frac{\text{Volum}}{\text{Àrea de la base}} = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{d}_r, \vec{d}_s]|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}$$

b) La recta, p, perpendicular a r i a s, té per vector direcció $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$. Aquesta recta, p, és la intersecció dels plans α i β, sent:

α: Pla que conté s i el vector $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$; és a dir:

α: $det\,(\overrightarrow{AX}, \vec{d}_r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0$, on $X = (x, y, z)$

β: Pla que conté r i el vector $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$, és a dir:

β: $det\,(\overrightarrow{BX}, \vec{d}_s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0$

Per tant: $p: \begin{cases} det\,(\overrightarrow{AX}, \vec{d}_r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \\ det\,(\overrightarrow{BX}, \vec{d}_s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \end{cases}$

111. Si $A(x_1, y_1, z_1)$ és un punt del pla $\pi: ax + by + cz + d = 0$, i $B(x_2, y_2, z_2)$ un punt tal que $\overrightarrow{AB} \cdot (a, b, c) = 0$, demostra que $B \in \pi$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot (a, b, c) = 0 \ \rightarrow\ a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ (ax_2 + by_2 + cz_2) - \underbrace{(ax_1 + by_1 + cz_1)}_{-d \text{ (ja que } A \in \pi)} = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \ \rightarrow\ B \in \pi$$

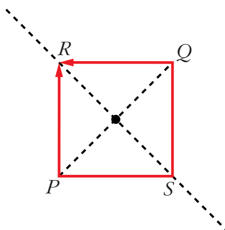
Pàgina 191

PER APROFUNDIR

112. Els punts $P(1, -1, 1)$ i $Q(3, -3, 3)$ són dos vèrtexs oposats d'un quadrat que està contingut en un pla que és perpendicular al pla d'equació $x + y = 0$.

a) Troba'n els vèrtexs restants.

b) Calcula el perímetre del quadrat.



a) Els altres dos vèrtexs, R i S, pertanyen a la mediatriu del segment PQ.

La mediatriu del segment PQ té com a vector direcció el vector normal al pla $x + y = 0$; és a dir, $(1, 1, 0)$.

Passa pel punt mitjà del segment PQ, és a dir, per $M(2, -2, 2)$. Per tant l'equació de la mediatriu és:

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

Un punt de r és de la forma $R(2 + \lambda, -2 + \lambda, 2)$.

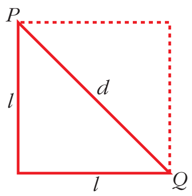
Busquem R de manera que $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QR} = 0$ (és a dir $\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{QR}$):

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PR}(1 + \lambda, -1 + \lambda, 1) \\ \overrightarrow{QR}(-1 + \lambda, 1 + \lambda, -1) \end{array}\right\} \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QR} = \lambda^2 - 1 + \lambda^2 - 1 - 1 = 2\lambda^2 - 3 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} \lambda = \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ \lambda = -\sqrt{\dfrac{3}{2}} = -\dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{array}$$

Els vèrtexs són: $R\left(\dfrac{4 + \sqrt{6}}{2}, \dfrac{-4 + \sqrt{6}}{2}, 2\right)$ i $S\left(\dfrac{4 - \sqrt{6}}{2}, \dfrac{-4 - \sqrt{6}}{2}, 2\right)$.

b)



La longitud de la diagonal és:

$d = |\overrightarrow{PQ}| = |(2, -2, 2)| = \sqrt{12}$

$d^2 = l^2 + l^2 \rightarrow d^2 = 2l^2 \rightarrow 12 = 2l^2 \rightarrow l = \sqrt{6}$

El perímetre serà: $P = 4\sqrt{6}$.

113. Donats els punts $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$, prova que la distància d de l'origen de coordenades al pla ABC verifica:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

El pla que passa per A, B i C és:

$\pi: \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ (vegeu exercici 55 de la unitat 6),

és a dir: $\pi: \dfrac{1}{a} x + \dfrac{1}{b} i + \dfrac{1}{c} z - 1 = 0$

Així, si $O(0, 0, 0)$, aleshores:

$$dist\,(O, \pi) = \frac{\left|\dfrac{1}{a} \cdot 0 + \dfrac{1}{b} \cdot 0 + \dfrac{1}{c} \cdot 0 - 1\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}}} = d \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \frac{1}{d} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{d^2}$$

114. **Donades les rectes r, s i t:**

$$r: \begin{cases} x = -2 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 2x + z = -2 \\ x + y = 0 \end{cases} \qquad t: \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = -1 \end{cases}$$

troba les coordenades d'un punt P que està en la recta t i que determina amb la recta s un pla que conté r.

- Escrivim les equacions de r, s i t en forma paramètrica:

$$r: \begin{cases} x = -2 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = -2 - 2\mu \end{cases} \qquad t: \begin{cases} x = k \\ y = -1 - k \\ z = k \end{cases}$$

- Busquem l'equació del pla, π, que conté r i s:

  Les rectes r i s es tallen en el punt $(-2, 2, 2)$, per tant el pla π conté aquest punt.

  Un vector normal al pla és:

  $$\vec{d}_r \times \vec{d}_s = (0, 1, 1) \times (1, -1, -2) = (-1, 1, -1) \;\rightarrow\; \vec{n}(1, -1, 1)$$

  Per tant el pla és: $\pi: 1(x + 2) - 1(y - 2) + 1(z - 2) = 0$

  $\pi: x - y + z + 2 = 0$

- P és el punt de tall de π amb la recta t:

  $k - (-1 - k) + k + 2 = 0 \;\rightarrow\; k + 1 + k + k + 2 = 0 \;\rightarrow\; 3k + 3 = 0 \;\rightarrow\; k = -1$

  El punt és $P(-1, 0, -1)$.

115. **Determina els valors dels paràmetres a i b perquè les rectes**

$$r: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ ax - z = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x + by = 3 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

es tallin ortogonalment.

- Escrivim les rectes en forma paramètrica:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = a\lambda \end{cases} \;\rightarrow\; \vec{d}_r(1, 2, a);\; P(0, 0, 0)$$

$$s: \begin{cases} x = 3 - b\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \;\rightarrow\; \vec{d}_s(-b, 1, -1);\; P'(3, 0, 3)$$

$$\overrightarrow{PP'}(3, 0, 3)$$

- Perquè les rectes es tallin, els vectors $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ i $\overrightarrow{PP'}$ han de ser coplanaris:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ -b & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 3a + 6b = -3(1 + a - 2b) = 0 \;\rightarrow\; a - 2b = -1$$

• Perquè siguin ortogonals, ha de ser $\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s = 0$, és a dir:

$$(1, 2, a) \cdot (-b, 1, -1) = -b + 2 - a = 0 \;\rightarrow\; a + b = 2$$

• Amb les dues condicions anteriors, obtenim els valors de a i b:

$$\left.\begin{array}{l} a - 2b = -1 \\ a + \;\; b = \;\;2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -a + 2b = 1 \\ \;\; a + \;\; b = 2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Sumant: } 3b = 3 \;\rightarrow\; b = 1 \\ a = 2 - b = 2 - 1 = 1 \;\rightarrow\; a = 1 \end{array}$$

Solució: $a = 1,\; b = 1$

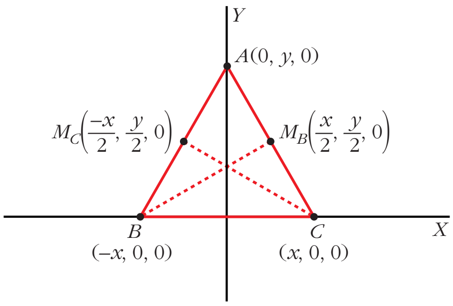
116. ***ABC* és un triangle isòsceles, i l'angle desigual és *A*. Troba el cosinus de l'angle *A* sabent que les mitjanes traçades des dels vèrtexs *B* i *C* són perpendiculars entre si.**

☛ ***Pren els eixos coordenats OXY de manera que l'eix OX coincideixi amb BC i OY coincideixi amb l'altura que va del vèrtex A al costat BC.***

Agafem els eixos coordenats OXY de manera que l'eix OX coincideixi amb BC, i l'eix OY coincideixi amb l'altura que va del vèrtex A al costat BC. Així:

$$\overrightarrow{BM_B}\left(\frac{3x}{2}, \frac{y}{2}, 0\right)$$

$$\overrightarrow{CM_C}\left(\frac{-3x}{2}, \frac{y}{2}, 0\right)$$



Les mitjanes corresponents són perpendiculars:

$$\overrightarrow{BM_B} \cdot \overrightarrow{CM_C} = 0 \;\rightarrow\; \frac{-9x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 0 \;\rightarrow\; y^2 = 9x^2 \;\;(1)$$

D'altra banda:

$$\overrightarrow{AB}(-x, -y, 0) \qquad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -x^2 + y^2$$

$$\overrightarrow{AC}(x, -y, 0) \qquad |\overrightarrow{AB}| = x^2 + y^2 = |\overrightarrow{AC}|$$

Per tant:

$$\cos \hat{A} = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|} = \frac{|-x^2 + y^2|}{(x^2 + y^2)^2} \overset{(1)}{=} \frac{-x^2 + 9x^2}{(x^2 + 9x^2)^2} = \frac{8x^2}{(10x^2)^2} = \frac{4}{50x^2} = \frac{2}{25x^2}$$

Per tant: $\cos \hat{A} = \dfrac{2}{25x^2}$

117. **Troba l'equació de la recta paral·lela al pla determinat pels punts $(0, 0, 0)$, $(1, 4, 1)$, $(-1, -1, 1)$, que passa pel punt $(1, 1, 1)$ i talla la recta r:**

$$r: \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$

- Escrivim la recta r en paramètriques:

$$r: \left\{ \begin{array}{l} x = 13/5 \\ y = -4/5 \\ z = \lambda \end{array} \right\} \rightarrow \vec{d}_r(0, 0, 1);\ R\left(\frac{13}{5}, \frac{-4}{5}, 0\right)$$

- Sigui s la recta que busquem. Passa per $P(1, 1, 1)$ i el seu vector direcció és $\vec{d}_s(a, b, c)$.
- Perquè les rectes r i s es tallin, els vectors $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ i $\overrightarrow{RP}$ han de ser coplanaris:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \\ -8/5 & 9/5 & 1 \end{vmatrix} = \frac{9}{5}a + \frac{8}{5}b = \frac{9a + 8b}{5} = 0 \rightarrow 9a + 8b = 0$$

- Si s és paral·lela al pla determinat pels tres punts donats, s serà perpendicular al vector normal al pla:

$$\left. \begin{array}{l} A(0, 0, 0) \\ B(1, 4, 1) \\ C(-1, -1, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \overrightarrow{AB}(1, 4, 1);\ \overrightarrow{AC}(-1, -1, 1) \\ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (5, -2, 3) = \vec{n} \end{array}$$

$$\vec{d}_s \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow (a, b, c) \cdot (5, -2, 3) = 0 \rightarrow 5a - 2b + 3c = 0$$

- Amb les dues equacions obtingudes, busquem un vector direcció de s:

$$\left. \begin{array}{l} 9a + 8b = 0 \\ 5a - 2b + 3c = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Solucions: } (-24t, 27t, 58t) \\ \text{Amb } t = 1, \text{ obtenim } \vec{d}_s(-24, 27, 58). \end{array}$$

- La recta és:

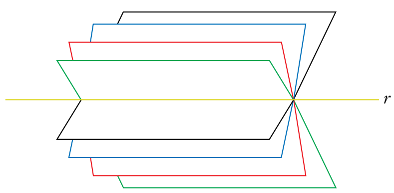
$$s: \begin{cases} x = 1 - 24\lambda \\ y = 1 + 27\lambda \\ z = 1 + 58\lambda \end{cases}$$

PER PENSAR UNA MICA MÉS

118. **Feix de plans**

La recta $r: \begin{cases} \pi: 2x + 3y - z - 4 = 0 \\ \sigma: x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$ **és la intersecció dels plans** π **i** σ.

El conjunt de tots els plans que contenen r s'anomena *FEIX DE PLANS* d'aresta r, i la seva expressió analítica és:
$a(2x + 3y - z - 4) + b(x - 2y + z + 1) = 0$



Per a cada parell de valors de a i b (excepte per a $a = 0$ i $b = 0$) s'obté l'equació d'un pla del feix.

a) Troba el pla del feix que passa per l'origen de coordenades.

b) Per a quin valor de k un dels plans del feix és perpendicular a la recta $t: \frac{x}{3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z}{k}$? Quin és aquest pla del feix?

c) Troba dos punts que pertanyin a tots els plans del feix anterior.

d) Posa l'expressió del feix de plans l'aresta del qual és la recta s:

$$s: \frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{1}$$

e) Quin dels plans d'aquest feix dista més de l'origen de coordenades?

a) El terme independent serà zero: $-4a + b = 0 \ \to\ b = 4a$. Per tant:

$a(2x + 3y - z - 4) + 4a(x - 2y + z + 1) = 0$; és a dir:

$2x + 3y - z - 4 + 4(x - 2y + z + 1) = 0$

$2x + 3y - z - 4 + 4x - 8y + 4z + 4 = 0$

$6x - 5y + 3z = 0$

b) Un pla del feix és:

$(2a + b)x + (3a - 2b)y + (-a + b)z + (-4a + b) = 0$

Un vector normal al pla és: $\vec{n}(2a + b, 3a - 2b, -a + b)$.

Perquè el pla sigui perpendicular a la recta, el vector normal del pla i el vector direcció de la recta han de ser paral·lels, és a dir, les seves coordenades han de ser proporcionals:

$$\frac{2a+b}{3} = \frac{3a-2b}{5} = \frac{-a+b}{k}$$

$$\left.\begin{aligned} 10a + 5b &= 9a - 6b \\ 2ka + kb &= -3a + 3b \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &a + 11b = 0 \ \to\ a = -11b \\ &(2k+3)a + (k-3)b = 0 \end{aligned}$$

$$-11(2k+3) + (k-3) = 0 \ \to\ -22k - 33 + k - 3 = 0$$

$$-21k - 36 = 0 \ \to\ k = \frac{-36}{21} = \frac{-12}{7} \ \to\ k = \frac{-12}{7}$$

El pla del feix és:

$-11b(2x + 3y - z - 4) + b(x - 2y + z + 1) = 0$

$-11(2x + 3y - z - 4) + (x - 2y + z + 1) = 0$

$-22x - 33y + 11z + 44 + x - 2y + z + 1 = 0$

$-21x - 35y + 12z + 45 = 0$

Una altra resolució:

Si la recta és perpendicular a un pla concret del feix, serà perpendicular a totes les rectes contingudes en aquest pla, i, en concret, a la recta r, aresta del feix.

Vector direcció de r: $\vec{d} = (2, 3, -1) \times (1, -2, 1) = (1, -3, -7)$.

Vector direcció de t: $\vec{d'} = (3, 5, k)$.

$$\vec{d} \cdot \vec{d'} = 0 \quad \rightarrow \quad (1, -3, -7) \cdot (3, 5, k) = 3 - 15 - 7k = 0 \quad \rightarrow \quad k = \frac{-12}{7}$$

A partir d'aquí, obtindríem la relació entre a i b, i el pla de l'eix com en el cas anterior.

c) Els punts que pertanyen a tots els plans de l'eix són els punts de la recta r. Per exemple: (1, 0, –2) i (0, 3, 5).

d) Escrivim la recta s en forma implícita:

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-2} \quad \rightarrow \quad -2x + 10 = 3y + 3 \quad \rightarrow \quad -2x - 3y + 7 = 0$$

$$\frac{x-5}{3} = \frac{z-3}{1} \quad \rightarrow \quad x - 5 = 3z - 9 \quad \rightarrow \quad x - 3z + 4 = 0$$

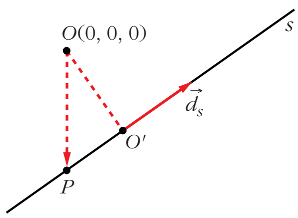
$$s: \begin{cases} 2x + 3y - 7 = 0 \\ x - 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

L'expressió de l'eix de plans l'aresta del qual és s és:

$$a(2x + 3y - 7) + b(x - 3z + 4) = 0$$

e) És el pla que conté la recta (atès que és de l'eix) i és perpendicular a $\overrightarrow{OO'}$, sent $O(0, 0, 0)$ i O' la projecció de O sobre la recta.

El calculem en el cas de la recta s:



Un punt genèric de la recta s és:

$$P(5 + 3\lambda, -1 - 2\lambda, 3 + \lambda)$$

Un vector direcció de s és $\vec{d}_s(3, -2, 1)$.

El vector $\overrightarrow{OP}$ ha de ser perpendicular a $\vec{d}_s$:

$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{d}_s = 0 \quad \rightarrow \quad 3(5 + 3\lambda) - 2(-1 - 2\lambda) + (3 + \lambda) = 0$$

$$15 + 9\lambda + 2 + 4\lambda + 3 + \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad 14\lambda + 20 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{-20}{14} = \frac{-10}{7}$$

Per tant: $O'\left(\frac{5}{7}, \frac{13}{7}, \frac{11}{7}\right)$; i el vector normal al pla és $\overrightarrow{OO'}\left(\frac{5}{7}, \frac{13}{7}, \frac{11}{7}\right)$; o bé (5, 13, 11).

El pla serà: $5\left(x - \frac{5}{7}\right) + 13\left(y - \frac{13}{7}\right) + 11\left(z - \frac{11}{7}\right) = 0$

$$5x + 13y + 11z - 45 = 0$$