UNITAT 8 LÍMITS DE FUNCIONS. CONTINUÏTAT

Pàgina 200

Alguns límits elementals

■ **Utilitza el sentit comú per donar el valor dels límits següents:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^3$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2$, $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} x^3$, $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - x^2)$

c) $\lim\limits_{x \to 2} x^2$, $\quad \lim\limits_{x \to 2} x^3$, $\quad \lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 5x^2 + 3)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2}$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2 + 1}$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x}$, $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2}$, $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x^2 + 1}$

f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x}$, $\quad \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x^2}$, $\quad \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x}{x^2 + 1}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$, $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$, $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2 + 1}$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 5x^2}{x^2 + 1}$

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$, $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{3x + 5}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - x^2) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$; $\quad \lim\limits_{x \to 2} x^3 = 8$; $\quad \lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 5x^2 + 3) = -9$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{4}$ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{2}{5}$

g) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$

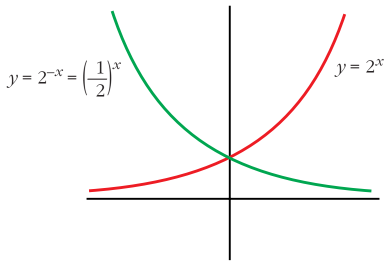
h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2+1} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3-5x^2}{x^2+1} = +\infty$

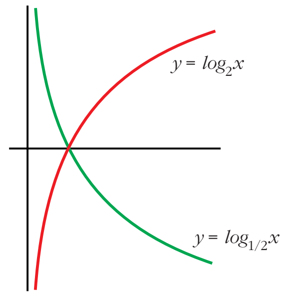
i) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x^2+1} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{3x+5} = -\infty$

Pàgina 201

Exponencials i logarítmiques

- **A la vista d'aquestes gràfiques, assigna valor als límits següents:**





a) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{-x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \log_2 x$, $\lim\limits_{x \to 0} \log_2 x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 x$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \log_{1/2} x$, $\lim\limits_{x \to 0} \log_{1/2} x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_{1/2} x$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{-x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \log_2 x$ no existeix, $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_2 x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 x = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \log_{1/2} x$ no existeix, $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_{1/2} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_{1/2} x = -\infty$

Amb la calculadora

■ **Temptejant amb la calculadora, dóna el valor dels següents límits:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 3} (x - 3) \ln (x - 3)$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{2x}$

a) 0,0175

b) $-2{,}53 \times 10^{-10}$

c) 1

Pàgina 203

1. Si $u(x) \to 2$ i $v(x) \to -3$ quan $x \to +\infty$, calcula el límit quan $x \to +\infty$ de:

a) $u(x) + v(x)$ **b)** $v(x)/u(x)$ **c)** $5^{u(x)}$

d) $\sqrt{v(x)}$ **e)** $u(x) \cdot v(x)$ **f)** $\sqrt[3]{u(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [u(x) + v(x)] = 2 + (-3) = -1$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{v(x)}{u(x)} = \dfrac{-3}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} 5^{u(x)} = 5^2 = 25$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{v(x)}$ no existeix

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} [u(x) \cdot v(x)] = 2 \cdot (-3) = -6$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{u(x)} = \sqrt[3]{2}$

2. Si $u(x) \to -1$ i $v(x) \to 0$ quan $x \to +\infty$, calcula el límit quan $x \to +\infty$ de:

a) $u(x) - v(x)$ **b)** $v(x) - u(x)$ **c)** $v(x)/u(x)$

d) $\log_2 v(x)$ **e)** $u(x) \cdot v(x)$ **f)** $\sqrt[3]{u(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [u(x) - v(x)] = -1 - 0 = -1$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} [v(x) - u(x)] = 0 - (-1) = 1$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{v(x)}{u(x)} = \dfrac{0}{-1} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 v(x) = \begin{cases} -\infty \ \text{ si } \ v(x) \to 0^+ \\ \text{no existeix si } \ v(x) \to 0^- \end{cases}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} [u(x) \cdot v(x)] = -1 \cdot 0 = 0$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{u(x)} = \sqrt[3]{-1} = -1$

Pàgina 204

3. Troba els límits següents:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 3x - x^3)$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (-5 \cdot 2^{2x})$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 3x - x^3) = -\infty$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-5 \cdot 2^{2x}) = -\infty$

4. Calcula aquests límits:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2 + 2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2 \log_{10} x)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2 + 2} = +\infty$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2 \log_{10} x) = -\infty$

Pàgina 205

5. Indica quines de les expressions següents són infinites (±∞) quan $x \to +\infty$:

a) $3x^5 - \sqrt{x} + 1$ **b)** $0,5^x$ **c)** $-1,5^x$

d) $\log_2 x$ **e)** $1/(x^3 + 1)$ **f)** $\sqrt{x}$

g) 4^x **h)** 4^{-x} **i)** -4^x

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^5 - \sqrt{x} + 1) = +\infty \to$ Sí

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} 0,5^x = 0 \to$ No

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-1,5^x) = -\infty \to$ Sí

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 x = +\infty \to$ Sí

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^3 + 1} = 0 \to$ No

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \to$ Sí

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} 4^x = +\infty \to$ Sí

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} 4^{-x} = 0 \to$ No

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} -4^x = -\infty \to$ Sí

6. **a) Ordena de menor a major els ordres dels infinits següents:**

$$\log_2 x \quad \sqrt{x} \quad x^2 \quad 3x^5 \quad 1{,}5^x \quad 4^x$$

b) Tenint en compte el resultat anterior, calcula:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_2 x}{\sqrt{x}} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^5}{x^2} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1{,}5^x}$$

a) $\log_2 x \quad \sqrt{x} \quad x^2 \quad 3x^5 \quad 1{,}5^x \quad 4^x$

b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_2 x}{\sqrt{x}} = 0$

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^5}{x^2} = +\infty$

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1{,}5^x} = 0$

Pàgina 206

7. **Sabent que, quan $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to 4$, $h(x) \to -\infty$, $u(x) \to 0$, assigna, sempre que puguis, límit quan $x \to +\infty$ a les expressions següents:**

a) $f(x) - h(x)$ **b)** $f(x)^{f(x)}$ **c)** $f(x) + h(x)$

d) $f(x)^x$ **e)** $f(x) \cdot h(x)$ **f)** $u(x)^{u(x)}$

g) $f(x)/h(x)$ **h)** $[-h(x)]^{h(x)}$ **i)** $g(x)^{h(x)}$

j) $u(x)/h(x)$ **k)** $f(x)/u(x)$ **l)** $h(x)/u(x)$

m) $g(x)/u(x)$ **n)** $x + f(x)$ **o)** $f(x)^{h(x)}$

p) $x + h(x)$

a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - h(x)\big) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$

b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)^{f(x)} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$

c) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) + h(x)\big) = +\infty + (-\infty) \;\to$ Indeterminat

d) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)^x = +\infty^{+\infty} = +\infty$

e) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) \cdot h(x)\big) = +\infty \cdot (-\infty) = -\infty$

f) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} u(x)^{u(x)} = 0^0 \;\to$ Indeterminat

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{+\infty}{-\infty} \quad \to \quad$ Indeterminat

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} [-h(x)]^{h(x)} = [+\infty]^{-\infty} = 0$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)^{h(x)} = 4^{-\infty} = 0$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{u(x)}{h(x)} = \dfrac{0}{-\infty} = 0$

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{u(x)} = \dfrac{+\infty}{(0)} = \pm\infty$

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{u(x)} = \dfrac{-\infty}{(0)} = \pm\infty$

m) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{u(x)} = \dfrac{4}{(0)} = \pm\infty$

n) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(x + f(x)\big) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

o) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{h(x)} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

p) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(x + h(x)\big) = +\infty + (-\infty) \quad \to \quad$ Indeterminat

Pàgina 207

8. **Les funcions f, g, h i u són les de l'exercici proposat 7 (pàgina anterior). Digues quines de les funcions següents són indeterminacions. En cada cas, si és determinació, digues de quin tipus, i, si no ho és, digues quin és el límit:**

a) $f(x) + h(x)$ **b)** $f(x)/h(x)$ **c)** $f(x)^{-h(x)}$ **d)** $f(x)^{h(x)}$

e) $f(x)^{u(x)}$ **f)** $u(x)^{h(x)}$ **g)** $[g(x)/4]^{f(x)}$ **h)** $g(x)^{f(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) + h(x)\big) = +\infty + (-\infty)$. Indeterminat.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{+\infty}{-\infty}$. Indeterminat.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{-h(x)} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{h(x)} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{u(x)} = (+\infty)^{0}$. Indeterminat.

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)^{h(x)} = 0^{-\infty} = \pm\infty$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{g(x)}{4}\right]^{f(x)} = 1^{+\infty}$. Indeterminat.

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)^{f(x)} = 4^{+\infty} = +\infty$

Pàgina 209

9. Sense operar, digues el límit, quan $x \to +\infty$, de les expressions següents:

a) $(x^2 - \sqrt[3]{2x+1})$ **b)** $(x^2 - 2^x)$ **c)** $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}$

d) $3^x - 2^x$ **e)** $5^x - \sqrt[3]{x^8 - 2}$ **f)** $\sqrt{x} - log_5 x^4$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - \sqrt[3]{2x+1}) = +\infty$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 2^x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}) = +\infty$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3^x - 2^x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (5^x - \sqrt[3]{x^8-2}) = +\infty$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - log_5 x^4) = +\infty$

10. Calcula el límit, quan $x \to +\infty$, de les expressions següents:

a) $\dfrac{3x^3+5}{x+2} - \dfrac{4x^3-x}{x-2}$ **b)** $\dfrac{x^3}{2x^2+1} - \dfrac{x}{2}$

c) $\dfrac{3x+5}{2} - \dfrac{x^2-2}{x}$ **d)** $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}$

e) $2x - \sqrt{x^2+x}$ **f)** $\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x^3+5}{x+2} - \dfrac{4x^3-x}{x-2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x^3+5)(x-2)-(4x^3-x)(x+2)}{(x+2)(x-2)} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 6x^3 + 5x - 10 - 4x^4 - 8x^3 + x^2 + 2x}{x^2-4} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^4 - 14x^3 + x^2 + 7x - 10}{x^2-4} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2+1} - \dfrac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 - x(2x^2+1)}{2(2x^2+1)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 - 2x^3 - x}{4x^2+2} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x}{4x^2+2} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+5}{2} - \dfrac{x^2-2}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2+5x-2x^2+4}{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+5x+4}{2x} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+x-x^2-1}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{x^2+x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(2x - \sqrt{x^2+x}\right)\left(2x + \sqrt{x^2+x}\right)}{2x + \sqrt{x^2+x}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2 - x^2 - x}{2x + \sqrt{x^2+x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - x}{2x + \sqrt{x^2+x}} = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}\right)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1-x-2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} = 0$

Pàgina 210

11. Troba els límits següents quan $x \to +\infty$:

a) $\left(1 + \dfrac{1}{5x}\right)^x$ **b)** $\left(5 + \dfrac{1}{5x}\right)^{5x}$ **c)** $\left(1 + \dfrac{1}{5x}\right)^5$

d) $\left(1 + \dfrac{5}{x}\right)^x$ **e)** $\left(5 + \dfrac{5}{x}\right)^{5x}$ **f)** $\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{5x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{5x}\right)^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \dfrac{1}{5x}\right)^{5x}\right]^{1/5} = e^{1/5}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5 + \dfrac{1}{5x}\right)^{5x} = 5^{+\infty} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{5x}\right)^5 = 1^5 = 1$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{5}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \dfrac{1}{x/5}\right)^{x/5}\right]^5 = e^5$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5 + \dfrac{5}{x}\right)^{5x} = 5^{+\infty} = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{5x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \dfrac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-5} = e^{-5}$

12. Calcula aquests límits quan $x \to +\infty$:

a) $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{3x-2}$ **b)** $\left(1 - \dfrac{1}{2x}\right)^{4x}$ **c)** $\left(1 + \dfrac{1}{5x}\right)^{3x}$

d) $\left(1 + \frac{3}{2x}\right)^5$ **e)** $\left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{3x}$ **f)** $\left(1 + \frac{2}{5x}\right)^{5x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x-2} = e^3$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{4x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-2x}\right)^{-2x}\right]^{-2} = e^{-2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{5x}\right]^{3/5} = e^{3/5}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{2x}\right)^{5} = 1^5 = 1$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-2x}\right)^{-2x}\right]^{-3/2} = e^{-3/2}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{5x}\right)^{5x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{5x/2}\right)^{5x/2}\right]^{2} = e^2$

Pàgina 211

13. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3x+5}{3x-1}\right)^{5x-3}$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x+5}{3x-1}\right)^{5x-3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$$

Resolen la indeterminació del quocient.

És $\frac{\infty}{\infty}$ amb x → ∞. Grau numerador = grau denominador → $\frac{3}{3} = 1$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x+5}{3x-1}\right) = 1; \text{ per tant } \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x+5}{3x-1}\right)^{5x-3} = 1^{\infty}$$

Podem aplicar la regla anterior:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x+5}{3x-1}\right)^{5x-3} = e^{\lim\limits_{x \to \infty}\left[\left(\frac{3x+5}{3x-1} - 1\right) \cdot (5x-3)\right]} = e^{\lim\limits_{x \to \infty}\left[\left(\frac{30x-18}{3x-1}\right)\right]} = e^{10}$$

14. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + x^2}\right)^{2x-4}$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + x^2}\right)^{2x-4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$$

Resolen el quocient.

És $\frac{\infty}{\infty}$ amb x → ∞. Grau numerador = grau denominador → $\frac{1}{1} = 1$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + x^2}\right) = 1; \text{ per tant } \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + x^2}\right)^{2x-4} = 1^{\infty}$$

Podem aplicar la regla anterior:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + x^2}\right)^{2x-4} = e^{\lim_{x \to \infty}\left[\left(\frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + x^2} - 1\right)(2x-4)\right]} = e^{\lim_{x \to \infty}\left[\left(\frac{-x^2 - 3x + 2}{x^3 + x^2}\right)(2x-4)\right]} =$$

$$= e^{\lim_{x \to \infty}\left[\left(\frac{-2x^3 - 2x^2 + 16x - 8}{x^3 + x^2}\right)\right]} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

- **Resol un dels exercicis resolts proposats més amunt, fent tots els passos.**

Solució exercici 13

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x + 5}{3x - 1}\right)^{5x-3}$$

$$\left(\frac{3x + 5}{3x - 1}\right)^{5x-3} = \left(1 + \frac{3x + 5}{3x - 1} - 1\right)^{5x-3} = \left(1 + \frac{6}{3x - 1}\right)^{5x-3} = \left(1 + \frac{1}{(3x - 1)/6}\right)^{5x-3} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{(3x - 1)/6}\right)^{\frac{3x-1}{6} \cdot \frac{6}{3x-1} \cdot (5x-3)} = \left[\left(1 + \frac{1}{(3x - 1)/6}\right)^{\frac{3x-1}{6}}\right]^{\frac{30x-18}{3x-1}}$$

Si ara fem el límit:

$$\lim_{x \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{(3x - 1)/6}\right)^{\frac{3x-1}{6}}\right]^{\frac{30x-18}{3x-1}} = e^{\lim_{x \to \infty}\left(\frac{30x-18}{3x-1}\right)} = e^{10}$$

Solució exercici 14

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + x^2}\right)^{2x-4}$$

$$\left(\frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + x^2}\right)^{2x-4} = \left(1 + \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + x^2} - 1\right)^{2x-4} = \left(1 + \frac{-x^2 - 3x + 2}{x^3 + x^2}\right)^{2x-4} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{\frac{x^3 + x^2}{-x^2 - 3x + 2}}\right)^{2x-4} = \left(1 + \frac{1}{\frac{x^3 + x^2}{-x^2 - 3x + 2}}\right)^{\frac{x^3 - x^2}{-x^2 - 3x + 2} \cdot \left(\frac{-x^2 - 3x + 2}{x^3 + x^2}\right) \cdot (2x-4)} =$$

$$= \left[\left(1 + \frac{1}{\dfrac{x^3 + x^2}{-x^2 - 3x + 2}} \right)^{\frac{x^3 - x^2}{-x^2 - 3x + 2}} \right]^{\left(\frac{-x^2 - 3x + 2}{x^3 + x^2}\right)(2x - 4)}$$

Si ara fem el límit:

$$\lim_{x \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\dfrac{x^3 + x^2}{-x^2 - 3x + 2}} \right)^{\frac{x^3 - x^2}{-x^2 - 3x + 2}} \right]^{\left(\frac{-2x^3 - 2x^2 + 16x - 8}{x^3 + x^2}\right)} = e^{\lim_{x \to \infty} \left(\frac{-2x^3 - 2x^2 + 16x - 8}{x^3 + x^2}\right)} = e^{-2}$$

Pàgina 213

15. Sense operar, digues el límit quan $x \to -\infty$ de les expressions següents:

a) $x^2 - \sqrt[3]{2x + 1}$ **b)** $x^2 + 2^x$ **c)** $x^2 - 2^x$

d) $x^2 - 2^{-x}$ **e)** $2^{-x} - 3^{-x}$ **f)** $\sqrt{x^5 - 1} - 5^x$

g) $2^x - x^2$ **h)** $x^2 - \sqrt{x^4 - 1}$ **i)** $\sqrt[3]{x + 2} - x^2$

j) $3^{-x} - 2^{-x}$

a) $\lim_{x \to -\infty} \left(x^2 - \sqrt[3]{2x + 1}\right) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$

b) $\lim_{x \to -\infty} (x^2 + 2^x) = +\infty$

c) $\lim_{x \to -\infty} (x^2 - 2^x) = +\infty$

d) $\lim_{x \to -\infty} (x^2 - 2^{-x}) = -\infty$

e) $\lim_{x \to -\infty} (2^{-x} - 3^{-x}) = -\infty$

f) $\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^5 - 1} - 5^x\right)$ no existeix

g) $\lim_{x \to -\infty} (2^x - x^2) = -\infty$

h) $\lim_{x \to -\infty} \left(x^5 - \sqrt{x^4 - 1}\right) = -\infty$

i) $\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt[3]{x + 2} - x^2\right) = -\infty$

j) $\lim_{x \to -\infty} (3^{-x} - 2^{-x}) = +\infty$

16. **Calcula el límit quan $x \to -\infty$ de les expressions següents:**

a) $\dfrac{3x^3+5}{x+2} - \dfrac{4x^3-x}{x-2}$ b) $\dfrac{x^3}{2x^2+1} - \dfrac{x}{2}$ c) $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}$

d) $2x + \sqrt{x^2+x}$ e) $\sqrt{x^2+2x} + x$ f) $\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$

g) $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{5x+3}$ h) $\left(\dfrac{x^2+x-1}{x^2+2}\right)^{3x-1}$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x^3+5}{x+2} - \dfrac{4x^3-x}{x-2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-3x^3+5}{-x+2} - \dfrac{-4x^3-x}{-x-2}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^4-5x+6x^3-10-4x^4+x^2+8x^3-2x}{x^2-4} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^4+14x^3+x^2-7x-10}{x^2-4} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2+1} - \dfrac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-x^3}{2x^2+1} + \dfrac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^3+2x^3+x}{4x^2+2} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{4x^2+2} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x} - \sqrt{x^2+1}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-x} - \sqrt{x^2+2}\right)\left(\sqrt{x^2-x} + \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2-x} + \sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x-x^2-1}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+1}} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x-1}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{-1}{1+1} = -\dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{x^2+x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x+\sqrt{x^2-x}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(-2x+\sqrt{x^2-x}\right)\left(-2x-\sqrt{x^2-x}\right)}{-2x-\sqrt{x^2-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2-x^2+x}{-2x-\sqrt{x^2-x}} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+x}{-2x-\sqrt{x^2-x}} = -\infty$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right) =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2-2x}+x\right)}{\sqrt{x^2-2x}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2x-x^2}{\sqrt{x^2-2x}+x} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}+x} = \dfrac{-2}{1+1} = \dfrac{-2}{2} = -1$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{-x}\right)^{-2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \dfrac{1}{-x/3}\right)^{-x/3}\right]^6 = e^6$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{5x+3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{-5x+3} = e^{-5}$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2}\right)^{3x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - x - 1}{x^2 + 2}\right)^{-3x-1} =$

$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(\frac{x^2 - x - 1}{x^2 + 2} - 1\right) \cdot (-3x-1)\right]} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-x-3}{-x^2+2} \cdot (-3x-1)\right)} =$

$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 10x + 3}{x^2 + 2}} = e^3$

Pàgina 216

17. Si $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$ i $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$, digues el valor del límit quan x tendeix a 1 de les funcions següents:

a) $f(x) + g(x)$ **b) $f(x) \cdot g(x)$** **c) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$**

d) $f(x)^{g(x)}$ **e) $\sqrt{g(x)}$** **f) $4f(x) - 5g(x)$**

a) $\lim\limits_{x \to 1} (f(x) + g(x)) = 3 + 2 = 5$

b) $\lim\limits_{x \to 1} (f(x) \cdot g(x)) = 3 \cdot 2 = 6$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{3}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)^{g(x)} = 3^2 = 9$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{g(x)} = \sqrt{2}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} (4f(x) - 5g(x)) = 12 - 10 = 2$

18. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ i $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$, llavors $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = l + m$.

Enuncia les restants propietats del límits de les operacions amb funcions emprant la notació adequada.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ i $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$, aleshores:

1) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = l + m$

2) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = l - m$

3) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot m$

4) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$ (Si $m \neq 0$).

5) Si $f(x) > 0$, $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x)^{g(x)}\right] = l^m$

6) Si n és senar, o si n és parell i $f(x) \geq 0$ $\rightarrow$ $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$

7) Si $\alpha > 0$ i $f(x) > 0$, $\lim\limits_{x \to a} [\log_\alpha f(x)] = \log_\alpha l$

19. **Si $\lim\limits_{x \to 2} p(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2} q(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2} r(x) = 3$ i $\lim\limits_{x \to 2} s(x) = 0$, digues, en els casos que sigui possible, el valor del $\lim\limits_{x \to 2}$ de les funcions següents:**

(Recorda que les expressions $(+\infty)/(+\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(0) \cdot (+\infty)$, $(1)^{(+\infty)}$, $(0)/(0)$ són indeterminacions.)

a) $2p(x) + q(x)$ **b)** $p(x) - 3q(x)$ **c)** $\dfrac{r(x)}{p(x)}$ **d)** $\dfrac{p(x)}{p(x)}$

e) $\dfrac{s(x)}{q(x)}$ **f)** $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ **g)** $s(x) \cdot p(x)$ **h)** $s(x)^{s(x)}$

i) $p(x)^{r(x)}$ **j)** $r(x)^{s(x)}$ **k)** $\dfrac{3 - r(x)}{s(x)}$ **l)** $\left[\dfrac{r(x)}{3}\right]^{s(x)}$

m) $r(x)^{p(x)}$ **n)** $r(x)^{-q(x)}$ **o)** $\left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{p(x)}$ **p)** $\left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{-p(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to 2} [2p(x) + q(x)] = +\infty + (+\infty) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 2} [p(x) - 3q(x)] = +\infty - (+\infty)$. Indeterminat.

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{r(x)}{p(x)} = \dfrac{3}{+\infty} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{p(x)}{p(x)} = \lim\limits_{x \to 2} 1 = 1$

e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{s(x)}{q(x)} = \dfrac{0}{+\infty} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$. Indeterminat.

g) $\lim\limits_{x \to 2} [s(x) \cdot p(x)] = 0 \cdot (+\infty)$. Indeterminat.

h) $\lim\limits_{x \to 2} s(x)^{s(x)} = 0^0$. Indeterminat.

i) $\lim\limits_{x \to 2} p(x)^{r(x)} = +\infty^3 = +\infty$

j) $\lim\limits_{x \to 2} r(x)^{s(x)} = 3^0 = 1$

k) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3 - r(x)}{s(x)} = \dfrac{3-3}{(0)} = \dfrac{0}{0}$. Indeterminat.

l) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{s(x)} = 1^0 = 1$

m) $\lim\limits_{x \to 2} r(x)^{p(x)} = 3^{+\infty} = +\infty$

n) $\lim\limits_{x \to 2} r(x)^{-q(x)} = 3^{-\infty} = 0$

o) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{p(x)} = 1^{+\infty}$. Indeterminat.

p) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{-p(x)} = 1^{-\infty}$. Indeterminat.

Pàgina 217

20. Calcula els límits següents:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3 - 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}$

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x+1)(x^2 - 3x + 5)}{(x+1)(x-7)} =$

$= \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x - 7} = \dfrac{9}{-8} = \dfrac{-9}{8}$

b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3 - 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \dfrac{45}{84} = \dfrac{15}{28}$

21. **Calcula els límits següents:**

a) $\displaystyle\lim_{x \to -3} \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2}}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[4]{x^3 - x}}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$

a) $\displaystyle\lim_{x \to -3} \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2}} = \lim_{x \to -3} \sqrt[6]{\frac{(x-1)^3 (x+3)^3}{x^4 (x+3)^2}} = \lim_{x \to -3} \sqrt[6]{\frac{(x-1)^3 (x+3)}{x^4}} = 0$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[4]{x^3 - x}}{\sqrt{x^2 + x - 2}} = \lim_{x \to 1} \sqrt[4]{\frac{x(x-1)(x+1)}{(x+2)^2 (x-1)^2}} = \lim_{x \to 1} \sqrt[4]{\frac{x(x+1)}{(x+2)^2 (x-1)}} \to$

$\to$ $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x)$ no existeix

$\displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

Pàgina 218

22. **Calcula:** $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 - 5x + 2}{x^2 + 2x} - \frac{x^3 + 2x + 1}{x^3 + x} \right)$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 - 5x + 2}{x^2 + 2x} - \frac{x^3 + 2x + 1}{x^3 + x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 - 5x + 2}{x(x+2)} - \frac{x^3 + 2x + 1}{x(x^2 + 1)} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 5x + 2) - (x+2)(x^3 + 2x + 1)}{x(x+2)(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x^2 - 5x + 2 - x^4 - 2x^2 - x - 2x^3 - 4x - 2}{x(x+2)(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-7x^3 + x^2 - 10x}{x(x+2)(x^2+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x(-7x^2 + x - 10)}{x(x+2)(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-7x^2 + x - 10}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{-10}{2 \cdot 1} = -5$$

23. **Calcula:** $\displaystyle\lim_{x \to 7} \left(\frac{x^2 - 7x + 4}{x - 3} \right)^{\frac{x+1}{x-7}}$

$$\lim_{x \to 7} \left(\frac{x^2 - 7x + 4}{x - 3} \right)^{\frac{x+1}{x-7}} = e^{\lim_{x \to 7} \left[\left(\frac{x^2 - 7x + 4}{x - 3} - 1 \right) \cdot \frac{x+1}{x-7} \right]} = e^{\lim_{x \to 7} \left(\frac{x^2 - 8x + 7}{x - 3} \cdot \frac{x+1}{x-7} \right)} =$$

$$= e^{\lim_{x \to 7} \frac{(x-7)(x-1)(x+1)}{(x-3)(x-7)}} = e^{\lim_{x \to 7} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-3)}} = e^{12}$$

Pàgina 220

24. **Troba quatre intervals diferents en cadascun dels quals l'equació $2x^4 - 14x^2 + 14x^4 - 1 = 0$ tingui un arrel.**

La funció és contínua en l'interval $(-\infty, +\infty)$ ja que és un polinomi:

$\left.\begin{array}{l} f(-4) = 231 \\ f(-3) = -7 \end{array}\right\}$ Té arrel en l'interval $(-4, -3)$

$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 \\ f(0'5) = 2'625 \end{array}\right\}$ Té arrel en l'interval $(0, 0'5)$

$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(1'5) = -1'375 \end{array}\right\}$ Té arrel en l'interval $(1, 1'5)$

$\left.\begin{array}{l} f(1'5) = -1'375 \\ f(2) = 3 \end{array}\right\}$ Té arrel en l'interval $(1'5, 2)$

Pàgina 226

EXERCICIS I PROBLEMES PROPOSATS

PER PRACTICAR

25. **Sabent que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ i $\lim_{x \to +\infty} h(x) = 3$, digues en quin dels casos següents hi ha indeterminació.**

Els casos en què no n'hi ha, digues quin és el límit quan $x \to +\infty$:

a) $f(x) + g(x)$ **b)** $g(x) + h(x)$

c) $\dfrac{f(x)}{h(x)}$ **d)** $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

e) $[h(x)]^{g(x)}$ **f)** $[3 - h(x)] \cdot f(x)$

g) $\dfrac{g(x)}{3 - h(x)}$ **h)** $\left[\dfrac{3}{h(x)}\right]^{g(x)}$

a) $\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x \to +\infty} \big(f(x)\big) + \lim_{x \to +\infty} \big(g(x)\big) = +\infty + (-\infty) =$

$= +\infty - (+\infty) \;\to\;$ Indeterminació.

b) $\lim_{x \to +\infty} \big(g(x) + h(x)\big) = \lim_{x \to +\infty} g(x) + \lim_{x \to +\infty} h(x) = -\infty + 3 = -\infty$

c) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{+\infty}{3} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{+\infty}{-\infty} \rightarrow$ Indeterminació.

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} [h(x)]^{g(x)} = 3^{-\infty} = \dfrac{1}{3^{+\infty}} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} [3 - h(x)] \cdot f(x) = 0 \cdot (+\infty) \rightarrow$ Indeterminació.

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{3 - h(x)} = \dfrac{-\infty}{(0)} = \pm\infty$ (pot ser $+\infty$ o $-\infty$).

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{3}{h(x)}\right]^{g(x)} = 1^{-\infty} \rightarrow$ Indeterminació.

26. Calcula els límits quan $x \to -\infty$ de les funcions següents:

a) $f(x) = \dfrac{2x + 5}{2 - x}$ **b)** $g(x) = \dfrac{10x - 5}{x^2 + 1}$

c) $h(x) = \dfrac{3x^2 + x - 4}{2x + 3}$ **d)** $i(x) = \dfrac{x^3 + 2x - 3}{7 + 5x^3}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x + 5}{2 - x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x + 5}{2 + x} = -2$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{10x - 5}{x^2 + 1} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 + x - 4}{2x + 3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - x - 4}{-2x + 3} = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 + 2x - 3}{7 + 5x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^3 - 2x - 3}{7 - 5x^3} = \dfrac{1}{5}$

27. Calcula els límits següents:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2 + 6x}}{2x + 1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{5x^2 - 7}{x + 1}}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \sqrt{x}}{2x - 3}$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^3 + 2}}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2 + 6x}}{2x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3}\,x}{2x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{5x^2 - 7}{x + 1}} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \sqrt{x}}{2x - 3} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^3 + 2}} = 0$

28. **Calcula aquests límits:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^3)$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln (x^2 + 1)}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 1}{e^x}$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x + 7})$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^3) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{x} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 1}{e^x} = 0$

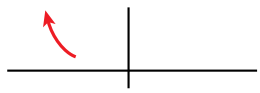
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x + 7}\right) = +\infty$

29. **Calcula els límits següents i representa'n gràficament els resultats obtinguts:**

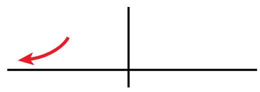
a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}5^x + 1)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{x+1}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x$ **d)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{1-3x}$

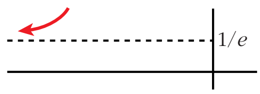
a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}5^x + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} (0{,}5^{-x} + 1) = +\infty$



b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x+1} = 0$

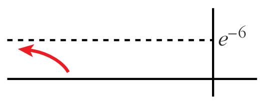


c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{-x} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$



d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{1-3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)^{1+3x} =$

$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{2}{x} - 1\right) \cdot (1 + 3x)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-2 - 6x}{x}\right)} = e^{-6} = \dfrac{1}{e^6}$



30. **Troba:**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 4})$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x)$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 4}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 4}\right)\left(\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4}\right)}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4}} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x^2 + 2x) - (x^2 - 4)}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4}} =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x + 4}{\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 - 4}} = \frac{-2}{1 + 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

b) $\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right) =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

31. **Calcula el límit de les funcions següents quan $x \to +\infty$:**

a) $f(x) = \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{(2x - 1)^2}$ **b)** $g(x) = \dfrac{x + \log x}{\log x}$

c) $h(x) = \dfrac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{2x + 1}}$ **d)** $i(x) = \dfrac{3 \cdot 2^x}{2^x + 1}$

a) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{(2x - 1)^2} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{4x^2 - 4x + 1} = \dfrac{5}{4}$

b) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x + \log x}{\log x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{\log x} + 1\right) = +\infty + 1 = +\infty$

c) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{2x + 1}} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2}\sqrt{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

d) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3 \cdot 2^x}{2^x + 1} = 3$

32. **Calcula els límits següents:**

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 5x}{x + 1} - \dfrac{3x}{2}\right)$ **b)** $\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 - \sqrt{x^4 + 2x}\right)$

c) $\lim_{x \to +\infty} \left(1{,}2^x - \dfrac{3x^2}{x + 1}\right)$ **d)** $\lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x + 4}{2x + 5}\right)^{x - 1}$

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 5x}{x + 1} - \dfrac{3x}{2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^2 - 10x - 3x(x + 1)}{2(x + 1)}\right) =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 10x - 3x^2 - 3x}{2x + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2 - 13x}{2x + 2} = -\infty$$

b) $\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 - \sqrt{x^4 + 2x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\left(x^2 - \sqrt{x^4 + 2x}\right)\left(x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}\right)}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - (x^4 + 2x)}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - x^4 - 2x}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} = 0$$

c) $\lim_{x \to +\infty} \left(1{,}2^x - \frac{3x^2}{x + 1}\right) = +\infty$

d) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x + 4}{2x + 5}\right)^{x - 1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{+\infty} = +\infty$

33. **Calcula:**

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln (1 + x)}{2^x}$

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln (1 - x)}{2^x}$

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{\ln x}$

d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1 - \ln x}$

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln (1 + x)}{2^x} = 0$ perquè qualsevol funció exponencial és un infinit d'ordre superior a qualsevol funció logarítmica.

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln (1 - x)}{2^x} = \frac{\infty}{0} = +\infty$

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{\ln x} = \frac{0}{\infty} = 0$

d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1 - \ln x} = -\infty$ perquè qualsevol potència és un infinit d'ordre superior a qualsevol funció logarítmica.

34. **Calcula els límits següents:**

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x\right)$

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}}$

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x + 3}{3x + \sqrt{x}}$

d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{10 + x\sqrt{x}}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2+1} - x \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\cancel{x^3} - \cancel{x^3} - x}{x^2+1} \right) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4} + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 - \dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{x^2}}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^4}}} = 2$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+3}{3x + \sqrt{x}} = \dfrac{2}{3}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{10 + x\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{10 + x^{3/2}} = +\infty$

Pàgina 227

35. Sabent que:

$\lim\limits_{x \to 2} p(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 2} q(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2} r(x) = 3$ $\lim\limits_{x \to 2} s(x) = 0$

digues, en els casos que sigui possible, el valor dels límits següents:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{s(x)}{p(x)}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2} [s(x) \cdot q(x)]$

c) $\lim\limits_{x \to 2} [s(x)]^{p(x)}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 2} [p(x) - 2q(x)]$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{s(x)}{p(x)} = \dfrac{0}{+\infty} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 2} [s(x) \cdot q(x)] = 0 \cdot (-\infty)$ $\to$ Indeterminat.

c) $\lim\limits_{x \to 2} [s(x)]^{p(x)} = 0^{+\infty} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to 2} [p(x) - 2q(x)] = +\infty - 2(-\infty) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

36. Calcula:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2+3}{x^3} - \dfrac{1}{x} \right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x(x-1)} \right]$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2+3}{x^3} - \dfrac{1}{x} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 3 - x^2}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3}{x^3} = \dfrac{3}{(0)}.$

Trobem els límits laterals:

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{3}{x^3} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{3}{x^3} = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x(x-1)} \right] = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x-(x-1)}{x(x-1)^2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x-x+1}{x(x-1)^2} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+1}{x(x-1)^2} = \dfrac{2}{0}$

Trobem els límits laterals:

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x+1}{x(x-1)^2} = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x+1}{x(x-1)^2} = +\infty.$

37. Calcula:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{3}{x^2-5x+6} - \dfrac{4}{x-2} \right]$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1-\sqrt{3-x}}{x-2} \right)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2} \right)$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x+1-\sqrt{4x^2+1})$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{3}{x^2-5x+6} - \dfrac{4}{x-2} \right] = \lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{3}{(x-2)(x-3)} - \dfrac{4}{(x-2)} \right] =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3-4(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3-4x+12}{(x-2)(x-3)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-4x+15}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{7}{(0)}$

Trobem els límits laterals:

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{-4x+15}{(x-2)(x-3)} = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{-4x+15}{(x-2)(x-3)} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1-\sqrt{3-x}}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(1-\sqrt{3-x})(1+\sqrt{3-x})}{(x-2)(1+\sqrt{3-x})} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1-(3-x)}{(x-2)(1+\sqrt{3-x})} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1-3+x}{(x-2)(1+\sqrt{3-x})} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{(x-2)(1+\sqrt{3-x})} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{1+\sqrt{3-x}} = \dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)}{x^2(\sqrt{x+9}+3)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+9-9}{x^2(\sqrt{x+9}+3)} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2(\sqrt{x+9}+3)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x(\sqrt{x+9}+3)} = \dfrac{1}{(0)}$

Trobem els límits laterals:

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x(\sqrt{x+9}+3)} = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x(\sqrt{x+9}+3)} = +\infty$

$$\text{d) } \lim_{x\to+\infty}\left(2x+1-\sqrt{4x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x+1-\sqrt{4x^2+1}\right)\left(2x+1+\sqrt{4x^2+1}\right)}{\left(2x+1+\sqrt{4x^2+1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+1)^2-(4x^2+1)}{\left(2x+1+\sqrt{4x^2+1}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+4x+1-4x^2+1}{\left(2x+1+\sqrt{4x^2+1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{4x+2}{\left(2x+1+\sqrt{4x^2+1}\right)} = \frac{4}{2+2} = \frac{4}{4} = 1$$

38. Calcula els límits següents:

$$\textbf{a) } \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$$

$$\textbf{b) } \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^4-1}$$

$$\textbf{c) } \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$$

$$\text{a) } \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\sqrt{2-x}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^4-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{3}{4}$$

$$\text{c) } \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1-3}{1-x^3} = \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}(-x^2-x-1)} = -1$$

39. Calcula:

$$\textbf{a) } \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$$

$$\textbf{b) } \lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$$

$$\textbf{c) } \lim_{x\to 5}\frac{3-\sqrt{5-x}}{1-\sqrt{5-x}}$$

$$\text{a) } \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x+x^2}\right)^2-1}{x\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(1+x)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } \lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^2-4}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)} = \lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{c) } \lim_{x\to 5}\frac{3-\sqrt{5-x}}{1-\sqrt{5-x}} = \lim_{x\to 5}\frac{9-\left(\sqrt{5-x}\right)^2}{\left(1-\sqrt{5-x}\right)\left(3+\sqrt{5-x}\right)} = \lim_{x\to 4}\frac{4+x}{-2+x-2\sqrt{5-x}} = 3$$

40. **Esbrina si aquestes funcions són contínues en $x = 2$:**

a) $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < 2 \\ 6 - x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3x - 2) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (6 - x) = 4 \\ f(2) = 6 - 2 = 4 \end{array}\right\}$ $f(x)$ és contínua a $x = 2$, ja que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x + 1) = 5 \end{array}\right\}$ $f(x)$ *no* és contínua a $x = 2$, ja que no existeix $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

41. **Estudia la continuïtat d'aquestes funcions:**

a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) • A $x \neq 1$ $\rightarrow$ $f(x)$ és contínua; ja que e^x i $\ln x$ són contínues per a $x < 1$ i $x \geq 1$, respectivament.

• A $x = 1$: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} e^x = e \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (\ln x) = 0$

No és contínua a $x = 1$, ja que no existeix $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

b) El domini de la funció és $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

• Si $x \neq 0$ i $x \neq 1$ $\rightarrow$ La funció és contínua.

• A $x = 0$: És discontínua, ja que $f(x)$ no està definida per a $x = 0$. A més, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ i $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. Hi ha una asímptota vertical a $x = 0$.

• A $x = 1$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x - 1) = 1 \\ f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1 \end{array}\right\}$ $f(x)$ és contínua a $x = 1$, ja que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

42. **Estudia els punts de discontinuïtat de les següents funcions i indica si la discontinuïtat és evitable o inevitable en cadascun d'ells:**

a) $y = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$ **c)** $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 2}$

a) $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2,\ x = -1$ aquests són els punts de continuïtat.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+3)}{\cancel{(x-2)}(x+1)} = \frac{5}{3}.$$ A $x = 2$ la discontinuïtat és evitable.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + x - 2} = \frac{-6}{0} = \infty.$$ A $x = -1$ la discontinuïtat és inevitable amb salt infinit.

b) $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = -3,\ x = 3$ són els punts de discontinuïtat.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x+3} = 0$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9} = \infty$$

A $x = 3$ la discontinuïtat és evitable i a $x = -3$ és inevitable amb salt infinit.

c) $x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1,\ x = -2$ són els punts de discontinuïtat.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 2} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x-3)}{\cancel{(x-1)}(x+2)} = -\frac{2}{3}.$$ A $x = 1$. la discontinuïtat és evitable.

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 2} = \infty.$$ A $x = -2$ la discontinuïtat és inevitable amb salt infinit.

43. Determina els punts de discontinuïtat de les funcions següents i estudia si la discontinuïtat és evitable o inevitable. En cas que sigui inevitable, precisa de quin tipus és:

a) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}$

b) $y = \dfrac{6 + x - x^3}{x^2 - x - 2}$

a) $x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$. Aquest és el punt de discontinuïtat.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x-2} = \infty.$$ És inevitable amb salt infinit.

b) $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2,\ x = -1$ són els punts de discontinuïtat.

$$\lim_{x\to 2} \frac{6 + x - x^3}{x^2 - x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(-x^2 - 2x - 3)}{(x-2)(x+1)} = -\frac{11}{2}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{6 + x - x^3}{x^2 - x - 2} = \infty$$

A $x = 2$ la discontinuïtat és evitable; a $x = -1$ és inevitable, amb salt infinit.

Pàgina 228

44. **Donada la funció $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2^{1/x}}$ digues quin és el seu domini de definició i calcula $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Quin tipus de discontinuïtat té la funció en $x = 0$?**

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$; $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{1 + 2^{1/x}} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{1 + 2^{1/x}} = 0$

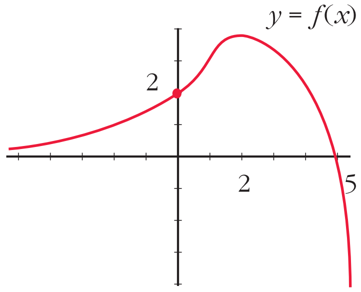
A $x = 0$ la discontinuïtat és inevitable, amb salt finit.

45. **Observant la gràfica de la funció $y = f(x)$, busca**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

e) Té f algun punt de discontinuïtat?



a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$;

c) $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 0$; d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$;

e) No té discontinuïtats.

PER RESOLDRE

46. **a) Calcula el límit de la funció $f(x)$ quan $x \to 0$, $x \to 2$, $x \to 3$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$:**

$$f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 5x + 6}$$

b) Representa'n gràficament els resultats.

a) $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 5x + 6} = \dfrac{x - 3}{(x - 3)(x - 2)}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{-3}{6} = \dfrac{-1}{2}$

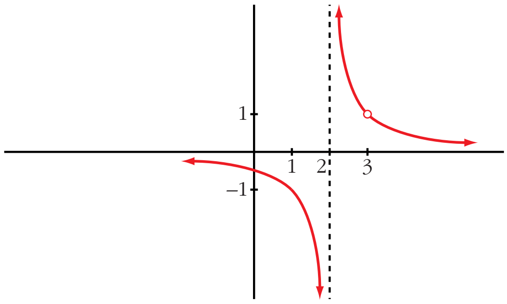
$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x - 2} = \dfrac{1}{(0)}$.

Trobem els límits laterals: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x - 2} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

b)



47. **a) Calcula el límit de la funció $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$ en els punts en què no està definida.**

b) Troba el límit quan $x \to +\infty$ i quan $x \to -\infty$ i representa la funció amb la informació que hi obtinguis.

c) Quins són els punts de discontinuïtat d'aquesta funció?

a) El domini de la funció és: $D = \mathbb{R} - \{0, 3\}$, ja que el denominador s'anul·la a:

$$x^2 - 3x = 0 \quad \to \quad x(x-3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

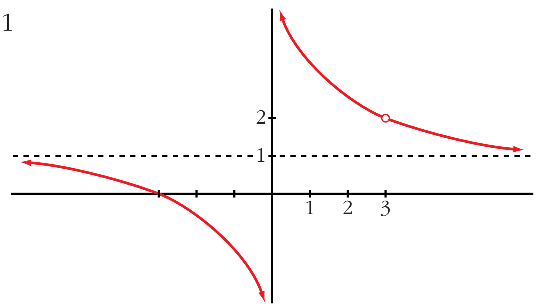
$$y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \frac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x+3}{x} = \frac{3}{(0)}.$$

Trobem els límits laterals: $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{x+3}{x} = -\infty$; $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{x+3}{x} = +\infty$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x+3}{x} = \frac{6}{3} = 2$$

b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x+3}{x} = 1$; $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x+3}{x} = 1$



c) La funció és discontínua a $x = 0$ (té una asímptota vertical) i a $x = 3$ (no està definida; té una discontinuïtat evitable).

48. **Determina el valor de a perquè es verifiqui $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax + 1} - x\right) = 2$.**

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax + 1} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + ax + 1} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + ax + 1} + x\right)}{\sqrt{x^2 + ax + 1} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + ax + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + ax + 1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax + 1}{\sqrt{x^2 + ax + 1} + x} = \frac{a}{1 + 1} = \frac{a}{2} = 2 \quad \rightarrow \quad a = 4$$

49. **Calcula els límits següents:**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{2 + x^2}}{3x - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{x^2}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2} + 1}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^{2/3} + 1}{x + 1} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{2 + x^2}}{3x - 1} = -\dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{1 + x^2})^2 - 1^2}{x(\sqrt{1 + x^2} + 1)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}(\sqrt{1 + x^2} + 1)} = \dfrac{0}{2} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\cancel{\sqrt{}}1 + x)^{\cancel{2}} - 1^2}{x^2(\sqrt{1 + x} + 1)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}(\sqrt{1 + x} + 1)} = +\infty$

50. **Troba els punts de discontinuïtat de la funció $y = \dfrac{2}{x - 3} - \dfrac{12}{x^2 - 9}$ i digues si en algun d'aquests la discontinuïtat és evitable.**

$$y = \frac{2}{x - 3} - \frac{12}{x^2 - 9} = \frac{2(x + 3) - 12}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{2x + 6 - 12}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{2x - 6}{(x - 3)(x + 3)} =$$

$$= \frac{2(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)}$$

La funció és discontínua a $x = 3$ i a $x = -3$; ja que no està definida per a aquests valors.

- A $x = -3$: $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{2(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{2}{(x + 3)} = +\infty$

  Hi ha una asímptota vertical a $x = -3$, la discontinuïtat no és evitable.

• A $x = 3$: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2}{(x+3)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

Així doncs, a $x = 3$, la discontinuïtat és evitable.

51. Calcula el valor que ha de tenir k perquè les funcions següents siguin contínues:

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ k - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x + k & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) • Si $x \neq 2$, la funció és contínua.

• A $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x + 1) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (k - x) = k - 2 \\ f(2) = 2 + 1 = 3 \end{array}\right\}$$

Perquè sigui contínua, ha de ser: $k - 2 = 3 \rightarrow k = 5$

b) • Si $x \neq 0$, la funció és contínua.

• A x = 0:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x + k) = k \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 - 1) = -1 \\ f(0) = 0 + k = k \end{array}\right\}$$

Perquè sigui contínua, ha de ser: $k = -1$

52. Calcula el valor de k perquè cada una de les funcions següents sigui contínua:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$

a) • Si $x \neq 1$, la funció és contínua.

• Si $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} (x^3 + x^2 + x + 1) = 4$$

$f(1) = k$

Perquè sigui contínua, ha de ser $k = 4$.

b) • Si $x \neq 1$, la funció és contínua.

• Si $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

$f(1) = k$

Perquè sigui contínua, ha de ser $k = \frac{1}{2}$.

53. Calcula els límits següents:

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^{x^2}$ **b)** $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x + 1}{x - 2}\right)^{2x - 1}$ **c)** $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x - 1}{x + 3}\right)^{x^2}$

d) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x - 4}{3x - 2}\right)^{\frac{x + 1}{3}}$ **e)** $\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{3x - 2}$ **f)** $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x - 3}{x + 2}\right)^{x^2 - 5}$

a) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^{x^2} = 1^\infty$ indeterminació

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^{x^2} = e^{\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1}} = e^2$$

b) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x + 1}{x - 2}\right)^{2x - 1} = 1^\infty$ indeterminació

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x + 1}{x - 2}\right)^{2x - 1} = e^{\lim_{x \to \infty} \left[\left(\frac{3}{x - 2}\right) \cdot (2x - 1)\right]} = e^{\lim_{x \to \infty} \frac{6x - 3}{x - 2}} = e^6$$

c) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x - 1}{x + 3}\right)^{x^2} = 1^\infty$ indeterminació

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x - 1}{x + 3}\right)^{x^2} = e^{\lim_{x \to \infty} \left(\frac{-4x^2}{x + 3}\right)} = e^{\infty} = \infty$$

d) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x - 4}{3x - 2}\right)^{\frac{x + 1}{3}} = 1^\infty$ indeterminació

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x - 4}{3x - 2}\right)^{\frac{x + 1}{3}} = e^{\lim_{x \to \infty} \left(\frac{-2}{3x - 2} \cdot \frac{x + 1}{3}\right)} = e^{-2/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$$

e) $\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{3x - 2} = 1^\infty$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{3x - 2} = \lim_{x \to \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\frac{3x - 2}{x^2}} = e^{\lim_{x \to \infty} \frac{3x - 2}{x^2}} = e^0 = 1$$

f) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{x^2-5} = 1^{\infty}$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{x^2-5} = e^{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{-5x^2+25}{x+2}} = e^{\infty} = \infty$$

54. **a) Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}}$**

b) Tingues en compte el resultat de l'apartat a) i troba $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ln\,(1+x)}{x}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty}$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0} \left(1 + \dfrac{1}{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}} = e$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ln\,(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{1}{x} \cdot ln\,(1+x)\right] = \lim\limits_{x \to 0} \left[ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] =$

$= ln\left[\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = ln\; e = 1$

Pàgina 229

55. **Estudia la continuïtat de cada una de les funcions següents per als distints valors del paràmetre a:**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \le 2 \\ a - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ $\qquad$ **b)** $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \le 0 \\ x + 2a & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) • A $x \ne 2$, la funció és contínua.

• A $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 + ax) = 4 + 2a \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (a - x^2) = a - 4 \\ f(2) = 4 + 2a \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Perquè sigui contínua, ha de ser:} \\ 4 + 2a = a - 4 \;\;\rightarrow\;\; a = -8 \end{array}$$

Per tant, la funció és contínua si $a = -8$, i és discontínua (a $x = 2$) si $a \ne -8$.

b) • A $x \ne 0$, la funció és contínua.

• A $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^{ax} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x + 2a) = 2a \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Perquè sigui contínua, ha de ser:} \\ 1 = 2a \;\;\rightarrow\;\; a = \dfrac{1}{2} \end{array}$$

Per tant, la funció és continua si $a = \dfrac{1}{2}$, i és discontínua (a $x = 0$) si $a \ne \dfrac{1}{2}$.

56. **Estudia la continuïtat d'aquesta funció:**

$$f(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \le x < 1 \\ 2x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Si $x \neq -1$ i $x \neq 1 \rightarrow$ la funció és contínua.
- Si $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} |x+2| = 1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} x^2 = 1 \\ f(-1) = 1 \end{array}\right\} \text{La funció és contínua a } x = -1.$$

- Si $x = 1 \rightarrow$ No és contínua, ja que no està definida a $x = 1$; no existeix $f(1)$.
  A més:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x+1) = 3 \end{array}\right\} \text{La discontinuïtat és de salt (finit).}$$

57. **Un comerciant ven un determinat producte. Per cada unitat de producte cobra la quantitat de 5 €. No obstant això, si se li n'encarreguen més de 10 unitats, disminueix el preu per unitat, i per cada x unitats cobra:**

$$C(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } 0 < x \le 10 \\ \sqrt{ax^2 + 500} & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

a) Troba a de forma que el preu varii de forma contínua en variar el nombre d'unitats que es compren.

b) A quant tendeix el preu d'una unitat quan es compren "moltíssimes" unitats?

☛ ***El preu d'una unitat és $C(x)/x$.***

a) $\lim\limits_{x \to 10^-} C(x) = \lim\limits_{x \to 10^-} (5x) = 50$

$\lim\limits_{x \to 10^+} C(x) = \lim\limits_{x \to 10^+} \sqrt{ax^2 + 500} = \sqrt{100a + 500}$

$C(10) = 50$

Perquè sigui contínua, ha de ser:

$\sqrt{100a + 500} = 50 \rightarrow 100a + 500 = 2500 \rightarrow 100a = 2000 \rightarrow a = 20$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{C(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{ax^2 + 500}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{20x^2 + 500}}{x} = \sqrt{20} \approx 4{,}47$ €

58. **Donada la funció $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$:**

a) Estudia'n la continuïtat.

b) Troba $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

a) • Si $x \neq 0$, la funció és contínua.

• A $x = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (1 - x) = 1 \\ f(0) = 1 - 0 = 1 \end{array} \right\} \text{ També és contínua a } x = 0.$$

Per tant, $f(x)$ és contínua.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = e^{-\infty} = \dfrac{1}{e^{+\infty}} = 0$

59. **Calcula el límit de les següents funcions quan $x \to +\infty$ i quan $x \to -\infty$, definint-les prèviament per intervals:**

a) $f(x) = |x - 3| - |x|$ **b) $f(x) = |2x - 1| + x$** **c) $f(x) = \dfrac{x + 1}{|x|}$**

a) • Si $x \leq 0$: $|x - 3| - |x| = -(x - 3) - (-x) = -x + 3 + x = 3$

• Si $0 < x \leq 3$: $|x - 3| - |x| = -(x - 3) - x = -2x + 3$

• Si $x > 3$: $|x - 3| - |x| = (x - 3) - x = -3$

Així doncs: $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq 0 \\ -2x + 3 & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ -3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -3$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

b) • Si $2x - 1 \leq 0 \;\rightarrow\; x \leq \dfrac{1}{2}$

$|2x - 1| + x = -(2x - 1) + x = -2x + 1 + x = -x + 1$

• Si $2x - 1 > 0 \;\rightarrow\; x > \dfrac{1}{2}$

$|2x - 1| + x = (2x - 1) + x = 3x - 1$

Així doncs: $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \leq \dfrac{1}{2} \\ 3x - 1 & \text{si } x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (3x - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-x + 1) = \lim_{x \to -\infty} (x + 1) = +\infty$$

c) • Si $x < 0$: $\dfrac{x + 1}{|x|} = \dfrac{x + 1}{-x}$

• Si $x > 0$: $\dfrac{x + 1}{|x|} = \dfrac{x + 1}{x}$

Així doncs: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{-x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x+1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x + 1}{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x + 1}{x} = -1$$

60. En el laboratori de Biologia de la universitat, han determinat que la grandària T dels exemplars d'un cert bacteri (mesurat en microns) varia amb el temps t, seguint la llei:

$$T(t) = \begin{cases} \sqrt{t + a} & \text{si } t < 8 \text{ hores} \\ \dfrac{-3 + \sqrt{3t - 15}}{t - 8} & \text{si } t > 8 \text{ hores} \end{cases}$$

El paràmetre a és una variable biològica la interpretació de la qual porta de cap els científics, però pensen que pot haver-hi un valor per al qual el creixement es mantingui continu en $t = 8$.

a) Decideix la qüestió.

b) Investiga quina arribarà a ser la grandària d'un bacteri si se'l cultiva indefinidament.

a) $\lim_{t \to 8^-} T(t) = \lim_{t \to 8^-} \sqrt{t + a} = \sqrt{8 + a}$

$$\lim_{t \to 8^+} T(t) = \lim_{t \to 8^+} \frac{-3 + \sqrt{3t - 15}}{t - 8} = \lim_{t \to 8^+} \frac{\sqrt{3t - 15} - 3}{t - 8} =$$

$$= \lim_{t \to 8^+} \frac{\left(\sqrt{3t - 15} - 3\right)\left(\sqrt{3t - 15} + 3\right)}{(t - 8)\left(\sqrt{3t - 15} + 3\right)} = \lim_{t \to 8^+} \frac{3t - 15 - 9}{(t - 8)\left(\sqrt{3t - 15} + 3\right)} =$$

$$= \lim_{t \to 8^+} \frac{3t - 24}{(t - 8)\left(\sqrt{3t - 15} + 3\right)} = \lim_{t \to 8^+} \frac{3(t - 8)}{(t - 8)\left(\sqrt{3t - 15} + 3\right)} =$$

$$= \lim_{t \to 8^+} \frac{3}{\sqrt{3t - 15} + 3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Perquè $T(t)$ pugui ser contínua, hauria de complir-se que:

$$\sqrt{8+a} = \frac{1}{2} \rightarrow 8 + a = \frac{1}{4} \rightarrow a = \frac{-31}{4}$$

Però, si $a = \frac{-31}{4}$, quedaria $T(t) = \sqrt{t - \frac{31}{4}}$ si $t < 8$.

Això comportaria que $T(t)$ no existís per a $t \leq \frac{31}{4} = 7{,}75$ hores.

Així doncs, *no* hi ha cap valor de a pel qual el creixement es mantingui continu.

b) $\lim\limits_{t \to +\infty} T(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{-3 + \sqrt{3t - 15}}{t - 8} = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ micres.

61. **Es defineix la funció f de la manera següent:**

$$f(x) = \begin{cases} \ln x - 1 & \text{si } x > 1 \\ 2x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Troba els valors de a i b perquè la funció sigui contínua i la seva gràfica passi per l'origen de coordenades.

- Perquè la gràfica de $f(x)$ passi per l'origen de coordenades, ha de ser $f(0) = 0$, és a dir: $f(0) = b = 0$
- Perquè la funció sigui contínua (per a $x \neq 1$, és una funció contínua), hem de:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x^2 + ax) = 2 + a \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (\ln x - 1) = -1 \\ f(1) = 2 + a \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Han de ser iguals, és a dir:} \\ 2 + a = -1 \rightarrow a = -3 \end{array}$$

Per tant, si $a = -3$ i $b = 0$, la funció és contínua; i la gràfica passa per l'origen de coordenades.

62. **Calcula:** $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} \right]$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{3x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1+x) - (1-x)}{3x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + x - 1 + x}{3x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x}{3x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{3(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3}$$

63. **Donada $f(x) = \dfrac{|x|}{x+1}$, justifica que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ i $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x+1} & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$$

64. **Estudia la continuïtat en $x = 0$ de la funció: $y = 2x + \dfrac{|x|}{x}$**

Quin tipus de discontinuïtat té?

A $x = 0$, la funció no està definida; per tant, és discontínua. Com:

$$y = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}, \text{ aleshores:}$$

$$\lim_{x \to 0^-} (2x - 1) = -1; \quad \lim_{x \to 0^+} (2x + 1) = 1$$

Així doncs, hi ha una discontinuïtat de salt (finit) a $x = 0$.

65. **Calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2+1}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{2x^2 - x - 1}{7 - x} \right)^{\frac{1}{x-2}}$

a) $$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2+1}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty}$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2+1}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{x^2-2x}{2x+1} \cdot \frac{1}{x} \right]} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{x-2}{2x+1}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

b) $$\lim_{x \to 2} \left(\frac{2x^2 - x - 1}{7 - x} \right)^{\frac{1}{x-2}} = 1^{\infty}$$

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{2x^2 - x - 1}{7 - x} \right)^{\frac{1}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x \to 2} \left[\frac{2x^2-8}{7-x} \cdot \frac{1}{x-2} \right]} = e^{\lim\limits_{x \to 2} \frac{2\,(x-2)\,(x+2)}{(7-x)\,(x-2)}} = e^{\frac{8}{5}}$$

66. **Troba el valor de a perquè es verifiqui:**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{ax} + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{ax + 1}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Quan tenim una indeterminació de $\frac{\infty}{\infty}$ amb $x \to \infty$ cal avaluar els graus de numerador i denominador.

Com que grau numerador és igual a grau denominador, cal dividir els coeficients de $\sqrt{x}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{ax + 1}} = \frac{2}{\sqrt{a}} \qquad \frac{2}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad a = 8$$

Pàgina 230

QÜESTIONS TEÒRIQUES

67. **Dóna una intepretació geomètrica del teorema de Bolzano i utilitza'l per demostrar que les gràfiques de $f(x) = x^3 + x^2$ i $g(x) = 3 + \cos x$ es tallen en algun punt.**

- Interpretació geomètrica: Si una funció $f(x)$ és contínua en un interval tancat, i en els extrems adopta valors de diferent signe, aleshores, amb tota seguretat, talla l'eix X en aquest interval.

- Per a les dues funcions donades, $f(x) = x^3 + x^2$ i $g(x) = 3 + \cos x$, considerem la funció diferència: $f(x) - g(x) = x^3 + x^2 - 3 - \cos x$

  Com que $f(x)$ i $g(x)$ són contínues, també ho és $f(x) - g(x)$.

  A més: $\begin{cases} f(0) - g(0) = -4 \ \to \ f(0) - g(0) < 0 \\ f(2) - g(2) \approx 9{,}42 \ \to \ f(2) - g(2) > 0 \end{cases}$

  Per tant, existeix un nombre $c \in (0, 2)$ de manera que $f(c) - g(c) = 0$ (aplicant el teorema de Bolzano), és a dir, $f(c) = g(c)$.

68. **Sigui la funció $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.**

El segon membre de la igualtat manca de sentit quan $x = 2$. Com elegir el valor de $f(2)$ perquè la funció f sigui contínua en aquest punt?

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$$

Perquè f sigui contínua a $x = 2$, hem d'escollir $f(2) = 4$.

69. **D'una funció g se sap que és contínua en l'interval tancat [0, 1] i que per a $0 < x \le 1$ és:**

$$g(x) = \frac{x^2 + x}{x}$$

Quant val $g(0)$?

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x(x+1)}{x} = \lim_{x \to 0^+} (x+1) = 1.$$

Així doncs, $g(0) = 1$.

70. Donada la funció:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-4}{4} & \text{si } 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ e^{-x^2} & \text{si } \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

observem que f està definida en [0, 1] i que verifica $f(0) = -1 < 0$ i $f(1) = e^{-1} > 0$, però no hi ha cap $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$. ¿Contradiu el teorema de Bolzano? Raona la resposta.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1/2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1/2^-} \dfrac{x-4}{4} = \dfrac{-7}{8} \\ \lim\limits_{x \to 1/2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1/2^+} e^{-x^2} = e^{-1/4} \end{array}\right\}$$

$f(x)$ *no* és contínua a $x = \dfrac{1}{2}$

Per tant, f no és contínua en l'interval [0, 1]; així doncs, no compleix les hipòtesis del teorema de Bolzano en aquest interval.

71. Si P és un punt genèric de la paràbola $y = -x^2 + 2x$, prova que el límit del quocient entre l'ordenada i l'abscissa de P quan P tendeix a 0 (origen de coordenades) és igual a 2.

$P(x, -x^2 + 2x) \Rightarrow$ quan $P \to 0$, $x \to 0$, per tant $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x^2 + 2x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} -x + 2 = 2$

72. Troba raonadament dues funcions que no siguin contínues en un punt x_0 del seu domini i tals que la funció suma sigui contínua en aquest punt.

Per exemple:

$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \ne 2 \\ 2 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ no és contínua a $x = 2$;

$g(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \ne 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ no és contínua a $x = 2$;

però la funció suma, $f(x) + g(x) = 3x$, sí és contínua a $x = 2$.

73. Té alguna arrel real l'equació següent?: $\sin x + 2x + 1 = 0$

Si la resposta és afirmativa, determina un interval d'amplitud menor que 2 en el qual es trobi l'arrel.

Considerem la funció $f(x) = sin\, x + 2x + 1$.

Veiem que: $f(x)$ és contínua a $[-1, 0]$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) \approx 1{,}84 < 0 \\ f(0) = 1 > 0 \end{array}\right\} \text{ signe de } f(1) \neq \text{ signe de } f(0)$$

Pel teorema de Bolzano, podem assegurar que existeix $c \in (-1, 0)$ de manera que $f(c) = 0$; és a dir, l'equació $sin\, x + 2x + 1 = 0$ té com a mínim una arrel en l'interval $(-1, 0)$.

74. **Demostra que l'equació $x^5 + x + 1 = 0$ té, almenys, una solució real.**

Considerem la funció $f(x) = x^5 + x + 1$.

Veiem que: $f(x)$ és contínua a $[-1, 0]$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = -1 < 0 \\ f(0) = 1 > 0 \end{array}\right\} \text{ signe de } f(-1) \neq \text{ signe de } f(0)$$

Pel teorema de Bolzano, podem assegurar que existeix $c \in (-1, 0)$ de manera que $f(c) = 0$; és a dir, l'equació $x^5 + x + 1 = 0$ té com a mínim una arrel en l'interval $(-1, 0)$.

75. **Una equació polinòmica de grau 3 és segur que té alguna arrel real. Demostra que és així, i digues si passa el mateix amb les de grau 4.**

- Si $f(x)$ és un polinomi de grau 3, tenim que:

  – Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, aleshores $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

  – Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, aleshores $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

  Per tant, podem trobar k de manera que: signe de $f(-k) \neq$ signe de $f(k)$.

  A més, $f(x)$ és contínua. Pel teorema de Bolzano, sabem que $f(x)$ té com a mínim una arrel en l'interval $(-k, k)$.

- Si $f(x)$ és un polinomi de grau 4 no passa el mateix. Per exemple, $x^4 + 1 = 0$ no té cap arrel real; donat que $x^4 + 1 > 0$ per a qualsevol valor de x.

76. **La funció $y = tg\, x$ pren valors de distint signe en els extrems de l'interval $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ i, no obstant això, no s'hi anul·la. Contradiu això el teorema de Bolzano?**

La funció $y = tg\, x$ no és contínua a $x = \frac{\pi}{2}$, que està en l'interval $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

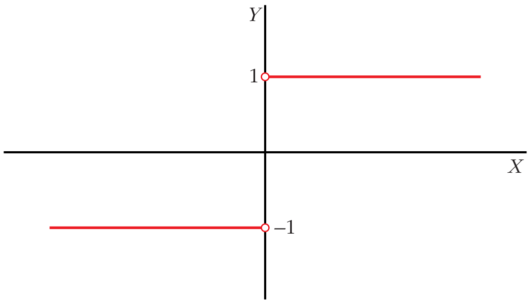
Per tant, no podem aplicar el teorema de Bolzano per a aquest interval.

77. **Considera la funció $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$. Determina'n el domini. Dibuixa'n la gràfica i raona si es pot assignar un valor a $f(0)$ perquè la funció sigui contínua en tot $\mathbb{R}$.**

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad \text{Domini} = \mathbb{R} - \{0\}$$

Com que $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1 \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$, no podem assignar cap valor a $f(0)$ perquè la funció sigui contínua en tot $\mathbb{R}$ (ja que a $x = 0$ no ho és).

Gràfic:



78. **Si existeix el límit d'una funció $f(x)$ quan $x \to a$, i si $f(x)$ és positiu quan $x < a$, podem assegurar que tal límit és positiu? I que no és negatiu? Justifica raonadament les respostes.**

Si $f(x) > 0$ quan $x < a$, aleshores, si existeix $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, ha de ser $\lim\limits_{x \to a} f(x) \geq 0$.

Així doncs, podem assegurar que el límit no és negatiu (podria ser positiu o zero).

79. **a) Comprova que $\lim\limits_{x \to +\infty} [\ln(x+1) - \ln(x)] = 0$.**

b) Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} x[\ln(x+1) - \ln(x)]$.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [\ln(x+1) - \ln(x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)\right] = \ln 1 = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x[\ln(x+1) - \ln(x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x\right] =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x\right] = \ln e = 1$

80. **De dues funcions $f(x)$ i $g(x)$ se sap que són contínues en l'interval $[a, b]$, que $f(a) > g(a)$ i que $f(b) < g(b)$.**

Pot demostrar-se que hi ha algun punt c d'aquest interval en què es tallen les gràfiques de les dues funcions?

Considerem la funció $f(x) - g(x)$.

- Si $f(x)$ i $g(x)$ són continues en $[a, b]$, aleshores $f(x) - g(x)$ és contínua en $[a, b]$.
- Si $f(a) > g(a)$, aleshores $f(a) - g(a) > 0$.
- Si $f(b) < g(b)$, aleshores $f(b) - g(b) < 0$.

És a dir, signe $[f(a) - g(a)] \neq$ signe $[f(b) - g(b)]$.

Pel teorema de Bolzano, podem assegurar que existeix $c \in (a, b)$ de manera que $f(c) - g(c) = 0$, és a dir, de manera que $f(c) = g(c)$. (Les gràfiques de $f(x)$ i $g(x)$ es tallen en $x = c$).

81. **Si $f(x)$ és contínua en [1, 9], $f(1) = -5$ i $f(9) > 0$, podem assegurar que $g(x) = f(x) + 3$ té almenys un zero en l'interval [1, 9]?**

- Si $f(x)$ és contínua en [1, 9], aleshores $g(x) = f(x) + 3$ també serà contínua en [1, 9] (ja que és la suma de dues funcions contínues).
- Si $f(1) = -5$, aleshores $g(1) = f(1) + 3 = -5 + 3 = -2 < 0$.
- Si $f(9) > 0$, aleshores $g(9) = f(9) + 3 > 0$.

És a dir, signe de $g(1) \neq$ signe de $g(9)$.

Pel teorema de Bolzano, podem assegurar que existeix $c \in (1, 9)$ de manera que $g(c) = 0$, és a dir, la funció $g(x)$ té com a mínim un zero en l'interval [1, 9].

82. **Escriu una definició per a cada una d'aquestes expressions i fes una representació de f:**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

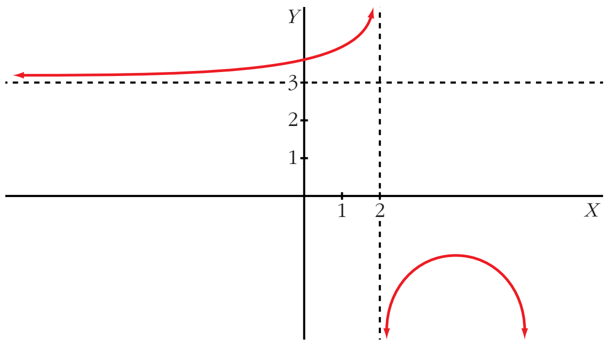
c) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$ **d)** $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

a) Donat $\varepsilon > 0$, existeix h de manera que, si $x < -h$, aleshores $|f(x) - 3| < \varepsilon$.

b) Donat k, podem trobar h de manera que, si $x > h$, aleshores $f(x) < -k$.

c) Donat k, podem trobar δ de manera que, si $2 - \delta < x < 2$, aleshores $f(x) > k$.

d) Donat k, podem trobar δ de manera que, si $2 < x < 2 + \delta$, aleshores $f(x) < -k$.



83. **Si una funció no està definida en $x = 3$, pot passar que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$?**

Pot ser contínua la funció en $x = 3$?

Sí, pot ser que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$, per exemple:

$f(x) = \dfrac{(x-3)(x+2)}{x-3}$ és tal que $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x+2)}{x-3} = 5$; i $f(x)$ no està definida en $x = 3$.

No obstant això, $f(x)$ no pot ser contínua en $x = 3$ (ja que no existeix $f(3)$).

Pàgina 231

84. **D'una funció contínua, f, sabem que $f(x) < 0$ si $x < 2$ i $f(x) > 0$ si $x > 2$. Podem saber el valor de $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$?**

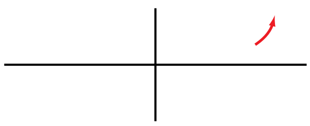
$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$

85. **Expressa simbòlicament cada una d'aquestes frases i fes una representació gràfica de cada cas:**

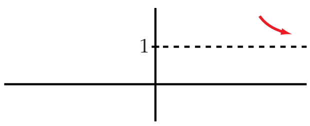
a) Podem aconseguir que $f(x)$ sigui major que qualsevol nombre K, per gran que sigui, donant a x valors tan grans com calgui.

b) Si pretenem que els valors de $g(x)$ estiguin tan pròxims a 1 com vulguem, haurem de donar a x valors suficientment grans.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



b) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$



PER APROFUNDIR

86. **Estudia la continuïtat de les funcions següents i classifica les discontinuïtats en evitables o inevitables.**

a) $f(x) = 2 - \dfrac{|x|}{x}$ **b)** $g(x) = x + \dfrac{x}{|x|}$

c) $h(x) = x - \dfrac{x^2}{|x|}$

a) $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ És discontínua a $x = 0$. La discontinuïtat és inevitable amb salt finit.

b) $g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ (Igual que $f(x)$)

c) $h(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ És contínua a $\mathbb{R}$.

87. **Estudia el comportament de cada una d'aquestes funcions quan x tendeix a $+\infty$:**

a) $f(x) = x^3 - \sin x$ **b)** $g(x) = \dfrac{\cos x}{x^2 + 1}$

c) $h(x) = \dfrac{E[x]}{x}$ **d)** $j(x) = \dfrac{3x + \sin x}{x}$

a) Com que $-1 \leq \sin x \leq 1$, aleshores: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - \sin x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

b) Com que $-1 \leq \cos x \leq 1$, aleshores: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\pm 1}{x^2 + 1} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{E[x]}{x} = 1$

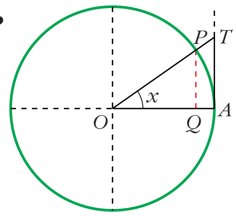
d) Com que $-1 \leq \sin x \leq 1$, aleshores: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x + \sin x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{x} = 3$

88. **Calcula:** $\lim\limits_{x \to 1} (x)^{1/(1-x)}$

Com que és del tipus 1^{∞}, podem aplicar la regla:

$$\lim_{x \to 1} x^{1/(1-x)} = e^{\lim\limits_{x \to 1}\left[(x-1) \cdot \frac{1}{1-x}\right]} = e^{\lim\limits_{x \to 1}(-1)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

89. **En una circumferència de radi 1, agafem un angle $\widehat{AOP}$ de x radiants. Observa que:**



$\overline{PQ} = \sin x$, $\overline{TA} = tg\ x$ **i** $arc\ \widehat{PA} = x$

Com que:

$\overline{PQ} < \widehat{PA} < \overline{TA} \rightarrow \sin x < x < tg\ x$.

A partir d'aquesta desigualtat, prova que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Tenim que $\sin x < x < tg\ x$. Dividint entre $\sin x$, queda:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \rightarrow \quad 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

Si agafem límits quan $x \rightarrow 0$, queda:

$$1 \geq \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \geq 1; \text{ és a dir: } \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

90. **Sabent que** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, **calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{2x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\ x}{x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{2x} = \dfrac{1}{2} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(1 - \dfrac{\sin x}{x}\right) = \lim\limits_{x \to 0} 1 - \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 - 1 = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\ x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x / \cos x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x}\right) =$

$= 1 \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + \cos x} = 1 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

91. **a)** **Suposem que f és contínua en [0, 1] i que $0 < f(x) < 1$ per a tot x de [0, 1]. Prova que existeix un nombre c de (0, 1) tal que $f(c) = c$.**

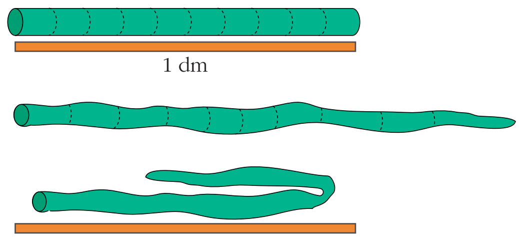
Fes una gràfica perquè el resultat sigui evident.

☛ ***Aplica el teorema de Bolzano a la funció $g(x) = f(x) - x$.***

b) **Imagina una barra de plastilina d'1 dm de longitud. Se situa sobre un segment de longitud 1 dm. A continuació, deformem la barreta estirant-la en alguns llocs i encongint-la en d'altres.**

Finalment, tornem a situar la barra deformada *dins* del segment, encara que podem plegar-la una o més vegades.

Doncs bé, podem assegurar que *algun punt de la barra està exactament en el mateix lloc en què estava*. (*)



— **Anomenant x un punt qualsevol de la barra inicial, construeix la gràfica de la funció:**

$x \to f(x)$ = posició de x després de la transformació

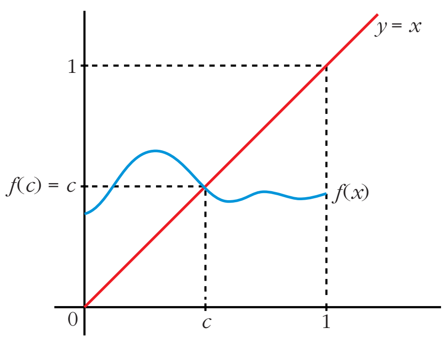
— **Relaciona $f(x)$ amb la de l'apartat a).**

— **Demostra l'afirmació** (*).

a) Considerem la funció $g(x) = f(x) - x$. Tenim que:

- $g(x)$ és contínua en [0, 1], ja que és la diferència de dues funcions contínues en [0, 1].
- $g(0) = f(0) > 0$, ja que $f(x) > 0$ per a tot x de [0, 1].
- $g(1) = f(1) - 1 < 0$, ja que $f(x) < 1$ per a tot x de [0, 1].

Pel teorema de Bolzano, sabem que existeix $c \in (0, 1)$ de manera que $g(c) = 0$, és a dir, $f(c) - c = 0$, o bé $f(c) = c$.



b) Anomenant x un punt qualsevol de la barra inicial, construïm la funció:

$x \rightarrow f(x)$ = "posició de x després de la transformació".

Tenim que:

- f és contínua en [0, 1] (atès que situem la barra sobre un segment de longitud 1 dm i només la deformem, no la trenquem).
- $0 < f(x) < 1$ per a tot x de [0, 1] (ja que situem la barra deformada *dins* del segment).
- Aplicant a $f(x)$ els resultats obtinguts en l'apartat a), veiem que existeix c de $(0, 1)$ de manera que $f(c) = c$; és a dir, existeix algun punt de la barra que està exactament en el mateix lloc en què estava.