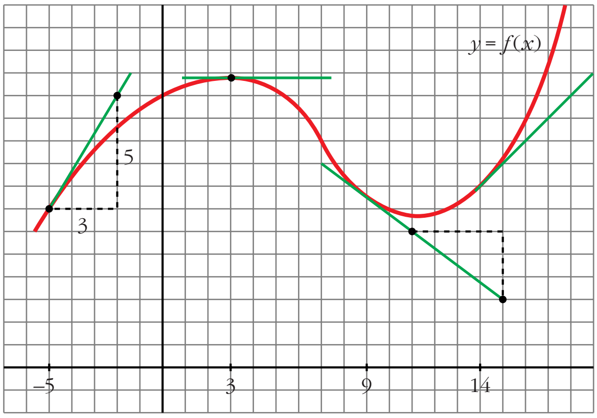
UNITAT 9

DERIVADES. TÈCNIQUES DE DERIVACIÓ

Pàgina 232

Problema 1



■ **Troba, mirant la gràfica i les rectes traçades, $f'(3)$, $f'(9)$ i $f'(14)$.**

$f'(3) = 0$; $f'(9) = \frac{-3}{4}$; $f'(14) = 1$

■ **Digues uns altres tres punts en què la derivada sigui positiva.**

La derivada també és positiva en $x = -4$, $x = -2$, $x = 0$…

■ **Digues un altre punt en què la derivada sigui zero.**

La derivada també és zero en $x = 11$.

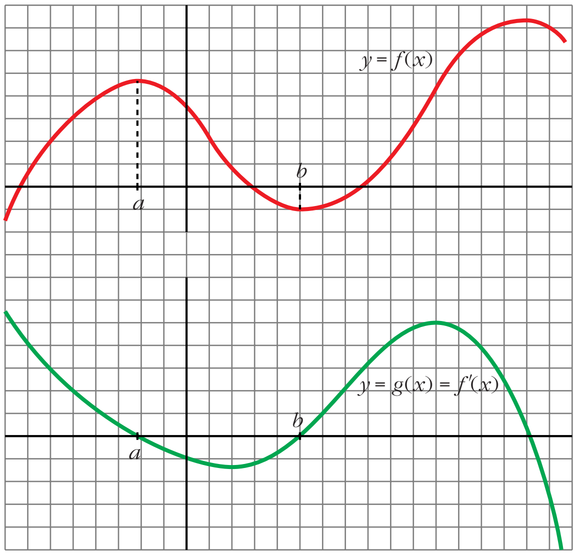
■ **Digues uns altres dos punts en què la derivada sigui negativa.**

La derivada també és negativa en $x = 4$, $x = 5$…

■ **Digues un interval $[a, b]$ en el qual es compleixi que "si $x \in [a, b]$, llavors $f'(x) > 0$".**

Per exemple, en l'interval $[-5, 2]$ es compleix que, si $x \in [-5, 2]$, aleshores $f'(x) > 0$.

Pàgina 233



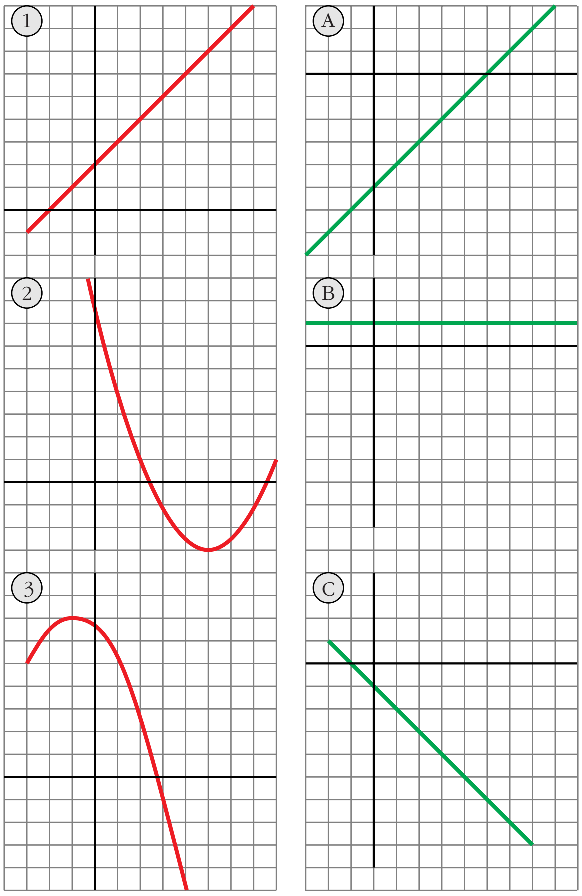
■ **Continua escrivint les raons per les quals $g(x)$ és una funció el comportament de la qual respon al de la derivada de $f(x)$.**

- En l'interval (a, b), $f(x)$ és decreixent. Por tant, la seva derivada és negativa. És el que li passa a $g(x)$ en (a, b).
- La derivada de f a b és 0: $f'(b) = 0$. I també és $g(b) = 0$.
- En general:

  $g(x) = f'(x) = 0$ en què $f(x)$ té tangent horitzontal.

  $g(x) = f'(x) > 0$ en què $f(x)$ és creixent.

  $g(x) = f'(x) < 0$ en què $f(x)$ és decreixent.



■ **Les gràfiques *A*, *B* i *C* són les funcions derivades de les gràfiques 1, 2 i 3, però en un altre ordre. Respon raonadament quina és la de cadascuna.**

1) B.

2) A.

3) C.

La derivada s'anul·la en els punts de tangent horitzontal, és positiva on la funció és creixent, i és negativa on la funció decreix.

Pàgina 239

1. Calcula la derivada de cada una de les funcions següents:

a) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

c) $f(x) = ln\,\dfrac{1-x}{1+x}$

d) $f(x) = \dfrac{1-tg\,x}{1+tg\,x}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-tg\,x}{1+tg\,x}}$

f) $f(x) = ln\,\sqrt{e^{tg\,x}}$

g) $f(x) = \sqrt{3^{x+1}}$

h) $f(x) = log\,(sin\,x \cdot cos\,x)^2$

i) $f(x) = sin^2\,x + cos^2\,x + x$

j) $f(x) = sin\sqrt{x+1} \cdot cos\,\sqrt{x-1}$

k) $f(x) = arc\,sin\,\sqrt{x}$

l) $f(x) = sin(3x^5 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x}\,)$

m) $f(x) = \sqrt{sin\,x + x^2 + 1}$

n) $f(x) = cos^2\sqrt[3]{x + (3-x)^2}$

a) $f'(x) = \dfrac{-1 \cdot (1+x) - (1-x) \cdot 1}{(1+x)^2} = \dfrac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = \dfrac{-2}{(1+x)^2}$

b) Utilitzem el resultat obtingut a a):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-1}{\sqrt{(1-x)(1+x)^3}}$$

c) Utilitzem el resultat obtingut a a):

$$f'(x) = \frac{1}{\dfrac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-2(1+x)}{(1-x)(1+x)^2} = \frac{-2}{1-x^2}$$

D'una altra manera: Si agafem logaritmes prèviament:

$f(x) = ln\,(1-x) - ln\,(1+x)$. Derivem:

$$f'(x) = \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{-1-x-1+x}{1-x^2} = \frac{-2}{1-x^2}$$

d) $f'(x) = \dfrac{-(1+tg^2\,x)(1+tg\,x) - (1-tg\,x)\cdot(1+tg^2\,x)}{(1+tg\,x)^2} =$

$$= \frac{(1+tg^2\,x)[-1-tg\,x-1+tg\,x]}{(1+tg\,x)^2} = \frac{-2(1+tg^2\,x)}{(1+tg\,x)^2}$$

D'una altra manera: Si tenim en compte el resultat obtingut a a):

$$f'(x) = \frac{-2}{(1+tg\,x)^2} \cdot D[tg\,x] = \frac{-2}{(1+tg\,x)^2} \cdot (1+tg^2\,x) = \frac{-2(1+tg^2\,x)}{(1+tg\,x)^2}$$

e) Tenint en compte el que hem obtingut a d):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1 - tg\,x}{1 + tg\,x}}} \cdot \frac{-2(1 + tg^2\,x)}{(1 + tg\,x)^2} = \frac{-(1 + tg^2\,x)}{\sqrt{(1 - tg\,x)(1 + tg\,x)^3}}$$

També podríem haver arribat a aquest resultat utilitzant el que hem obtengut a b).

f) $f(x) = ln\,\sqrt{e^{tg\,x}} = ln\,e^{(tg\,x)\,/\,2} = \dfrac{tg\,x}{2}$

$f'(x) = \dfrac{1 + tg^2\,x}{2}$

g) $f(x) = \sqrt{3^{x+1}} = 3^{(x+1)\,/\,2}$

$f'(x) = 3^{(x+1)\,/\,2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot ln\,3 = \dfrac{ln\,3}{2} \cdot \sqrt{3^{x+1}}$

h) $f(x) = log\,(sin\,x \cdot cos\,x)^2 = 2\left[log\,(sin\,x + log\,(cos\,x)\right]$

$$f'(x) = 2\left[\frac{cos\,x}{sin\,x} \cdot \frac{1}{ln\,10} + \frac{-sin\,x}{cos\,x} \cdot \frac{1}{ln\,10}\right] = \frac{2}{ln\,10} \cdot \frac{cos^2\,x - sin^2\,x}{sin\,x \cdot cos\,x} =$$

$$= \frac{4}{ln\,10} \cdot \frac{cos^2\,x - sin^2\,x}{2\,sin\,x \cdot cos\,x} = \frac{4}{ln\,10} \cdot \frac{cos\,2x}{sin\,2x} = \frac{4}{ln\,10 \cdot tg\,2x}$$

D'una altra manera:

$$f(x) = log\,(sin\,x \cdot cos\,x)^2 = 2\,log\left(\frac{sin\,2x}{2}\right)$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{ln\,10} \cdot \frac{cos\,2x}{\dfrac{sin\,2x}{2}} = \frac{4}{ln\,10 \cdot tg\,2x}$$

i) $f(x) = sin^2\,x + cos^2\,x + x = 1 + x$

$f'(x) = 1$

j) $$f'(x) = \frac{cos\sqrt{x+1} \cdot cos\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}} + \frac{sin\sqrt{x+1} \cdot \left(-sin\sqrt{x-1}\right)}{2\sqrt{x-1}} =$$

$$= \frac{cos\sqrt{x+1} \cdot cos\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}} - \frac{sin\sqrt{x+1} \cdot sin\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}$$

k) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x - x^2}}$

l) $f'(x) = cos\left(3x^5 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x}\right) \cdot \left(15x^4 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$

m) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{sin\,x + x^2 + 1}} \cdot (cos\,x + 2x) = \dfrac{cos\,x + 2x}{2\sqrt{sin\,x + x^2 + 1}}$

n) $f'(x) = 2cos\sqrt[3]{x + (3-x)^2} \cdot \left[-sin\sqrt[3]{x + (3-x)^2}\right] \cdot \dfrac{1 + 2(3-x)\cdot(-1)}{\sqrt[3]{(x + (3-x)^2)^2}} =$

$$= \frac{-2\ cos\sqrt[3]{x + (3-x)^2}\ sin\sqrt[3]{x + (3-x)^2} \cdot (2x-5)}{3\sqrt[3]{(x + (3-x)^2)^2}} =$$

$$= \frac{(5-2x) \cdot sin\left(2\sqrt[3]{x + (3-x)^2}\right)}{3\sqrt[3]{(x + (3-x)^2)^2}}$$

2. Troba les derivades 1a, 2a i 3a de les funcions següents:

a) $y = x^5$ **b)** $y = x\ cos\ x$ **c)** $y = sin^2 x + cos^2 x + x$

a) $y = x^5$

$y' = 5x^4$; $y'' = 20x^3$; $y''' = 60x^2$

b) $y = x\ cos\ x$

$y' = cos\ x - x\ sin\ x$

$y'' = -sin\ x - sin\ x - x\ cos\ x = -2sin\ x - x\ cos\ x$

$y''' = -2cos\ x - cos\ x + x\ sin\ x = -3cos\ x + x\ sin\ x$

c) $y = sin^2\ x + cos^2\ x + x = 1 + x$

$y' = 1$; $y'' = 0$; $y''' = 0$

3. Calcula $f'(1)$ essent: $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\ \sqrt[3]{3x}}{2\sqrt[5]{3x^2}} \cdot e^4$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}\ \sqrt[3]{3x}}{2\sqrt[5]{3x^2}} \cdot e^4 = \frac{x^{1/2} \cdot 3^{1/3} \cdot x^{1/3} \cdot e^4}{2 \cdot 3^{1/5} \cdot x^{2/5}} = \frac{3^{2/15} \cdot e^4}{2} \cdot x^{13/30} = \frac{\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{2} \cdot x^{13/30}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{3} \cdot \frac{13}{30}\ x^{-17/30} = \frac{13\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{60}\ \sqrt[30]{x^{17}}$$

Per tant: $f'(1) = \dfrac{13\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{60}$

4. Calcula $f'(\pi/6)$ essent: $f(x) = (cos^2\ 3x - sin^2\ 3x) \cdot sin\ 6x$

$$f(x) = (cos^2\ 3x - sin^2\ 3x) \cdot sin\ 6x = cos\ 6x \cdot sin\ 6x = \frac{sin\ 12x}{2}$$

$$f'(x) = \frac{12cos\ 12x}{2} = 6cos\ 12x$$

Per tant: $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 6 \cdot cos\ \dfrac{12\pi}{6} = 6 \cdot cos\,(2\pi) = 6 \cdot 1 = 6$

5. **Calcula $f'(0)$ essent: $f(x) = ln\,\sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot arc\ tg\ \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$**

$$f(x) = ln\,\sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\ arc\ tg\ \frac{2x+1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\ ln\,(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\ arc\ tg\ \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2/\sqrt{3}}{1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$= \frac{2x+1}{2x^2+2x+2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4x^2+4x+1}{3}} = \frac{2x+1}{2x^2+2x+2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{3 + 4x^2 + 4x + 1} =$$

$$= \frac{2x+1}{2x^2+2x+2} - \frac{2}{4x^2+4x+4} = \frac{2x+1}{2x^2+2x+2} - \frac{1}{2x^2+2x+2} =$$

$$= \frac{2x}{2x^2+2x+2} = \frac{x}{x^2+x+1}$$

Per tant: $f'(0) = 0$

Pàgina 240

6. **Estudia la derivabilitat en $x_0 = 3$ de la funció: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \le 3 \\ 3x - 9, & x > 3 \end{cases}$**

- Continuïtat en $x_0 = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 3x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (3x - 9) = 0 \end{array}\right\} \quad \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) = 0$$

Per tant, $f(x)$ és contínua en $x_0 = 3$.

- Derivabilitat en $x_0 = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2x - 3) = 3 = f'(3^-) \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (3) = 3 = f'(3^+) \end{array}\right\}$$

Les derivades laterals existeixen i coincideixen.

Per tant, $f(x)$ és derivable en $x_0 = 3$. A més, $f'(3) = 3$.

7. **Calcula m i n perquè $f(x)$ sigui derivable en $\mathbb{R}$: $f(x) = \begin{cases} x^2 - mx + 5, & x \le 0 \\ -x^2 + n, & x > 0 \end{cases}$**

- Si $x \ne 0$, la funció és contínua i derivable, ja que està formada per dos polinomis.

- Continuïtat en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 - mx + 5) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-x^2 + n) = n \\ f(0) = 5 \end{array}\right\}$$ Perquè $f(x)$ sigui contínua en $x = 0$, ha de ser: $n = 5$

- Derivabilitat en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (2x - m) = -m = f'(0^-) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-2x) = 0 = f'(0^+) \end{array}\right\}$$ Perquè sigui derivable en $x = 0$, ha de ser: $-m = 0 \rightarrow m = 0$

Per tant, $f(x)$ és derivable en $\mathbb{R}$ per a $m = 0$ i $n = 5$.

Pàgina 241

8. Sabem que la derivada de la funció $f(x) = x^3$ es $f'(x) = 3x^2$.

Tenint en compte aquest resultat, troba la derivada de la seva funció inversa: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Pàgina 242

9. Comprova que $sin\,(x^2 y) - y^2 + x = 2 - \dfrac{\pi^2}{16}$ passa pel punt $\left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$ i troba l'equació de la recta tangent en aquest punt.

Substituïm $x = 2$, $y = \dfrac{\pi}{4}$ en l'expressió:

$$sin\left(4 \cdot \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi^2}{16} + 2 = 0 + 2 - \frac{\pi^2}{16} = 2 - \frac{\pi^2}{16}$$

Es compleix la igualtat. Així doncs, la corba donada passa pel punt $\left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Necessitem obtenir el valor de $y'\left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$. Trobem prèviament $y'(x, y)$:

Derivem $sin\,(x^2 y) - y^2 + x = 2 - \dfrac{\pi^2}{16}$:

$$cos\,(x^2 y) \cdot (2xy + x^2 \cdot y') - 2y \cdot y' + 1 = 0$$

$$2xy\,cos\,(x^2 y) + y' \cdot x^2 \cdot cos\,(x^2 y) - 2yy' + 1 = 0$$

$$y'(x^2 \cdot cos\,(x^2 y) - 2y) = -1 - 2xy\,cos\,(x^2 y)$$

$$y' = \frac{-1 - 2xy\,cos\,(x^2 y)}{x^2 \cdot cos\,(x^2 y) - 2y}$$

Per tant:

$$y'\left(2, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1 - \pi \cdot \cos \pi}{4 \cos \pi - \pi/2} = \frac{-1 + \pi}{-4 - \pi/2} = \frac{-2 + 2\pi}{-8 - \pi} = \frac{2 - 2\pi}{8 + \pi}$$

L'equació de la recta tangent és: $y = \frac{\pi}{4} + \frac{2 - 2\pi}{8 + \pi}(x - 2)$

10. Calcula la derivada de cada una de les funcions següents:

$f(x) = (\sin x)^x$ $\qquad\qquad$ $g(x) = x^{\sin x}$

$f(x) = (\sin x)^x \rightarrow \ln f(x) = x \ln (\sin x)$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln (\sin x) + x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \rightarrow f'(x) = (\sin x)^x \left[\ln (\sin x) + \frac{x \cos x}{\sin x}\right]$

$g(x) = x^{\sin x} \rightarrow \ln g(x) = \sin x \cdot \ln x$

$\frac{g'(x)}{g(x)} = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$

$g'(x) = x^{\sin x} \cdot \left[\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right]$

Pàgina 248

11. Calcula Δy, dy, $\Delta y - dy$ per a:

a) $y = x^2 - x$ per a $x_0 = 3$, $dx_0 = 0{,}01$

b) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ per a $x_0 = 2$, $dx_0 = 0{,}1$

c) $y = \sqrt[3]{x}$ per a $x_0 = 125$, $dx_0 = 1$

a) $\Delta y = f(3{,}01) - f(3) = 0{,}0501$

$dy = f'(3) \cdot 0{,}01 = 0{,}0502$

$\Delta y - dy = -0{,}0001$

b) $\Delta y = f(2'1) - f(2) = \sqrt{(2{,}1)^2 - 1} - \sqrt{(2)^2 - 1} = 0{,}11457$

$dy = f'(2) \cdot 0{,}1 = \frac{2 \cdot 2}{2\sqrt{2^2 - 1}} \cdot 0{,}1 = 0{,}11547$

$\Delta y - dy = -0{,}0009$

c) $\Delta y = f(126) - f(125) = 0{,}01330$

$dy = f'(125) \cdot 1 = 0{,}0133$

$\Delta y - dy = 0{,}0003$

12. **A una bola de bronze de 7 cm de radi se li aplica un bany de plata de 0,5 mm de gruix. Calcula la quantitat de plata que s'ha fet servir (aproximadament, a partir de la diferencial).**

$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3$

$dV = V'(r) \cdot h = 4\pi r^2 \cdot h = 4\pi \cdot (7\text{ cm})^2 \cdot 0{,}05\text{ cm} = 30{,}79\text{ cm}^3$ aprox.

13. **Calcula una aproximació de $\sqrt[3]{126}$ fent els passos següents:**

a) Anomenar $f(x) = \sqrt[3]{x}$

b) Obtenir df per a $x_0 = 125$ i $dx_0 = 1$

c) Obtenir $f(126) \approx f(125) + df(125)$ per $h = 1$

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

b) $df = 0{,}013$ (exercici 11)

c) $f(126) \simeq 5 + 0{,}013 = 5{,}013$

14. **Procedint com en l'exercici anterior, troba aproximadament:**

a) $1{,}01^4$ **b) $\sqrt{15{,}8}$** **c) $\sqrt[3]{66}$**

a) $f(x) = x^4$ df per a $x_0 = 1$ i $h = 0{,}01$ $df(1)$ per $h = 0{,}01 = 0{,}04$

$f(1{,}01) = 1 + 0{,}04 = 1{,}04$

b) $f(x) = \sqrt{x}$ df per a $x_0 = 15$ i $h = 0{,}8$ $df(15)$ per $h = 0{,}8 = 0{,}103$

$f(15{,}8) = 3{,}873 + 0{,}103 = 3{,}976$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ df per a $x_0 = 65$ i $h = 1$ $df(65)$ per $h = 1 = 0{,}02$

$f(66) = 4{,}02 + 0{,}02 = 4{,}04$

Pàgina 253

EXERCICIS I PROBLEMES PROPOSATS

PER PRACTICAR

Calcula les derivades de les funcions següents:

15. **a) $y = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 3}$** **b) $y = \sqrt[3]{3x^2}$**

a) $y' = \frac{2x(x^2 + 3) - (x^2 - 3)\,2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{2x^3 + 6x - 2x^3 + 6x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{12x}{(x^2 + 3)^2}$

b) $y' = \frac{2}{\sqrt[3]{9x}}$

16. **a)** $y = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{2/3}$ **b)** $y = \frac{2}{x} + \frac{x^2}{2}$

a) $y' = \frac{2}{3}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1/3} \cdot \frac{-1 \cdot (1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1/3} \cdot \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} =$

$= \frac{2}{3} \frac{-2}{(1-x)^{1/3} \cdot (1+x)^{5/3}} = \frac{-4}{3\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^5}}$

b) $y' = 2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2} \cdot 2x = -\frac{2}{x^2} + x$

17. **a)** $y = \frac{\ln x}{x}$ **b)** $y = 7e^{-x}$

a) $y' = \frac{(1/x) \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ b) $y' = -7e^{-x}$

18. **a)** $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ **b)** $y = \sin x \cos x$

a) $y' = \frac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2} = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2 - e^{2x} - e^{-2x} - 2}{(e^x - e^{-x})^2} = \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$

b) $y' = \cos x \cdot \cos x + (-\sin x) \cdot \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

19. **a)** $y = \frac{1}{\sin x}$ **b)** $y = \ln (x^2 + 1)$

a) $y' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$ b) $y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$

20. **a)** $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{3}$ **b)** $y = \cos^2 (2x - \pi)$

a) $y' = \frac{1}{1 + (x/3)^2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1/3}{1 + x^2/9} = \frac{3}{9 + x^2}$

b) $y' = 2\cos (2x - \pi) \cdot \big(-\sin (2x - \pi)\big) \cdot 2 = -4\cos (2x - \pi) \cdot \sin (2x - \pi) =$

$= -2\cos (4x - 4\pi)$

21. **a)** $y = \sin^2 x$ **b)** $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$

a) $y' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$ b) $y' = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} x}} \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x) = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{2\sqrt{\operatorname{tg} x}}$

22. **a)** $y = sin\, x^2$ **b)** $y = arc\, tg\,(x^2 + 1)$

a) $y' = cos\, x^2 \cdot 2x = 2x\, cos\, x^2$ b) $y' = \dfrac{1}{1 + (x^2 + 1)^2} \cdot 2x = \dfrac{2x}{x^4 + 2x^2 + 2}$

23. **a)** $y = (2\sqrt{x} - 3)^7$ **b)** $y = log_2 \sqrt{x}$

a) $y' = 7(2\sqrt{x} - 3)^6 \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{7}{\sqrt{x}}(2\sqrt{x} - 3)^6$

b) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{ln\, 2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2x\, ln\, 2}$

24. **a)** $y = sin^2\, x^2$ **b)** $y = arc\, tg\, \dfrac{1}{x}$

a) $y' = 2sin\, x^2 \cdot cos\, x^2 \cdot 2x = 4x\, sin\, x^2\, cos\, x^2 = 2x\, sin\,(2x^2)$

b) $y' = \dfrac{1}{1 + (1/x)^2} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{-1/x^2}{1 + 1/x^2} = -\dfrac{1}{x^2 + 1}$

25. **a)** $y = cos^5\,(7x^2)$ **b)** $y = 3^x + 1$

a) $y' = 5cos^4\,(7x^2) \cdot (-sin\,(7x^2)) \cdot 14x = -70x\, cos^4\,(7x^2)\, sin\,(7x^2)$

b) $y' = 3^x\, ln 3$

26. **a)** $y = \sqrt[3]{(5x - 3)^2}$ **b)** $y = arc\, sin\, \dfrac{x^2}{3}$

a) $y' = \dfrac{2}{3}(5x - 3)^{-1/3} \cdot 5 = \dfrac{10}{3\sqrt[3]{5x - 3}}$

b) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{x^2}{3}\right)^2}} \cdot \dfrac{2x}{3} = \dfrac{2x/3}{\dfrac{\sqrt{9 - x^4}}{3}} = \dfrac{2x}{\sqrt{9 - x^4}}$

27. **a)** $y = ln\,(2x - 1)$ **b)** $y = tg\, \dfrac{x^2}{2}$

a) $y' = \dfrac{2}{2x - 1}$

b) $y' = \left(1 + tg^2\, \dfrac{x^2}{2}\right) \cdot \dfrac{2x}{2} = x + x\, tg^2\, \dfrac{x^2}{2}$

28. **a)** $y = \ln(x^2 - 1)$ **b)** $y = \operatorname{arc\,cos} \sqrt{2x}$

a) $y' = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

b) $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - (\sqrt{2x})^2}} \cdot \dfrac{2}{2\sqrt{2x}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2x} \cdot \sqrt{1 - 2x}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2x - 4x^2}}$

29. **a)** $y = \ln \sqrt{1 - x}$ **b)** $y = (\operatorname{arc\,tg} x)^2$

a) $y = \ln \sqrt{1 - x} = \ln (1 - x)^{1/2} = \dfrac{1}{2} \ln (1 - x)$

$y' = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{-1}{(1 - x)} = \dfrac{-1}{2 - 2x}$

b) $y' = 2(\operatorname{arc\,tg} x) \cdot \dfrac{1}{1 + x^2} = \dfrac{2 \operatorname{arc\,tg} x}{1 + x^2}$

30. **a)** $y = \log_3 (7x + 2)$ **b)** $y = \ln \operatorname{tg} \dfrac{3}{x}$

a) $y' = \dfrac{1}{\ln 3} \cdot \dfrac{7}{(7x + 2)} = \dfrac{7}{(7x + 2) \ln 3}$

b) $y' = \dfrac{1}{\operatorname{tg} 3/x} \cdot \left(1 + \operatorname{tg}^2 \dfrac{3}{x}\right) \cdot \left(-\dfrac{3}{x^2}\right) = -\dfrac{3\,(1 + \operatorname{tg}^2 3/x)}{x^2 \operatorname{tg} 3/x}$

31. **a)** $y = e^{4x}$ **b)** $y = \ln \left(\ln \dfrac{1}{x}\right)$

a) $y' = 4e^{4x}$

b) $y' = \dfrac{1}{\ln 1/x} \cdot \dfrac{1}{1/x} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{x \ln 1/x}$

32. **a)** $y = 2^x$ **b)** $y = \operatorname{arc\,sin} \dfrac{x + 1}{x - 1}$

a) $y' = 2^x \cdot \ln 2$

b) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)^2}} \cdot \dfrac{(x - 1) - (x + 1)}{(x - 1)^2} = \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{(x - 1)^2 - (x + 1)^2}}{x - 1}} \cdot \dfrac{-2}{(x - 1)^2} =$

$= -\dfrac{2/(x - 1)}{\sqrt{(x - 1)^2 - (x + 1)^2}} = \dfrac{2}{(x - 1)\sqrt{x^2 + 1 - 2x - x^2 - 1 - 2x}} = -\dfrac{2}{(x - 1)\sqrt{-4x}}$

33. **a)** $\boldsymbol{y = 5\,tg^3(3x^2 + 1)}$ **b)** $\boldsymbol{y = \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

a) $y' = 15\,tg^2\,(3x^2 + 1) \cdot [1 + tg^2\,(3x^2 + 1)] \cdot 6x = 90x\,[tg^2\,(3x^2 + 1) + tg^4\,(3x^2 + 1)]$

b) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}\left(1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \dfrac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}} = \dfrac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x^2 + x\sqrt{x}}}$

34. **a)** $\boldsymbol{y = \sqrt{tg\,x^2}}$ **b)** $\boldsymbol{y = \sqrt[3]{\dfrac{x - 2}{x + 2}}}$

a) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{tg\,x^2}}(1 + tg^2\,x^2) \cdot 2x = \dfrac{x(1 + tg^2\,x^2)}{\sqrt{tg\,x^2}}$

b) $y' = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x - 2}{x + 2}\right)^{-2/3} \cdot \dfrac{x + 2 - (x - 2)}{(x + 2)^2} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{\left(\dfrac{x - 2}{x + 2}\right)^2}} \cdot \dfrac{4}{(x + 2)^2} =$

$= \dfrac{4}{3 \cdot (x + 2)^2 \cdot \dfrac{\sqrt[3]{(x - 2)^2}}{(x + 2)^{2/3}}} = \dfrac{4}{3(x + 2)^{4/3} \cdot \sqrt[3]{(x - 2)^2}} = \dfrac{4}{3\sqrt[3]{(x + 2)^4\,(x - 2)^2}} =$

$= \dfrac{4}{3(x + 2)\sqrt[3]{(x + 2)(x - 2)^2}}$

35. **Calcula la derivada de les funcions següents, aplicant-hi prèviament les propietats dels logaritmes:**

a) $\boldsymbol{y = ln\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}}$ **b)** $\boldsymbol{y = ln\,(x\,tg\,x)^2}$

c) $\boldsymbol{y = ln\,\dfrac{\sqrt[3]{x^2 - 1}}{x^2}}$ **d)** $\boldsymbol{y = ln\,(2^x\,sin^2\,x)}$

a) $y = ln\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}} = \dfrac{1}{2}\,[ln\,(1 - x) - ln\,(1 + x)]$

$y' = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{-1}{1 - x} - \dfrac{1}{1 + x}\right] = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{-1 - x - 1 + x}{1 - x^2}\right] = \dfrac{-1}{1 - x^2} = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

b) $y = ln\,(x\,tg\,x)^2 = 2[ln\,x + ln\,(tg\,x)]$

$y' = 2\left[\dfrac{1}{x} + \dfrac{1 + tg^2\,x}{tg\,x}\right] = 2\left[\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{tg\,x} + tg\,x\right] = \dfrac{2}{x} + 2\,cotg\,x + 2\,tg\,x$

c) $y = ln\,\dfrac{\sqrt[3]{x^2 - 1}}{x^2} = -2\,ln\,x + \dfrac{1}{3}\,ln\,(x^2 - 1)$

$y' = \dfrac{-2}{x} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2x}{(x^2 - 1)} = \dfrac{-2}{x} + \dfrac{2x}{3x^2 - 3} = \dfrac{-6x^2 + 6 + 2x^2}{3x^3 - 3x} = \dfrac{-4x^2 + 6}{3x^3 - 3x}$

d) $y = ln\,(2^x\, sin^2\, x)$

$y = ln\;(2^x\, sin^2\, x) = ln\, 2^x + ln\, sin^2\, x = x\, ln\;2 + 2\;ln\;sin\, x$

$y' = ln\;2 + 2\,\dfrac{cos\, x}{sin\, x}$

36. **Calcula la derivada d'aquestes funcions implícites:**

a) $x^2 + y^2 = 9$

b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$

c) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

d) $\dfrac{(x-1)^2}{8} + \dfrac{(y+3)^2}{14} = 1$

e) $x^3 + y^3 + 2xy = 0$

f) $xy^2 = x^2 + y$

a) $2x + 2y \cdot y' = 0$

$y' = \dfrac{-2x}{2y} = \dfrac{-x}{y}$

b) $2x + 2yy' - 4 - 6y' = 0$

$y'(2y - 6) = 4 - 2x$

$y' = \dfrac{4 - 2x}{2y - 6} = \dfrac{2 - x}{y - 3}$

c) $\dfrac{2x}{16} + \dfrac{2yy'}{9} = 0$

$\dfrac{x}{8} + \dfrac{2yy'}{9} = 0$

$\dfrac{2yy'}{9} = -\dfrac{x}{8} \rightarrow 2yy' = \dfrac{-9x}{8} \rightarrow y' = \dfrac{-9x}{16y}$

d) $\dfrac{2(x-1)}{8} + \dfrac{2(y+3)y'}{14} = 0$

$\dfrac{(x-1)}{4} + \dfrac{(y+3)y'}{7} = 0$

$\dfrac{(y+3)y'}{7} = -\dfrac{(x-1)}{4} \rightarrow (y+3)y' = \dfrac{7(1-x)}{4}$

$y' = \dfrac{7 - 7x}{4y + 12}$

e) $3x^2 + 3y^2y' + 2y + 2xy' = 0$

$y'(3y^2 + 2x) = -3x^2 - 2y$

$y' = \dfrac{-3x^2 - 2y}{3y^2 + 2x}$

f) $x^2 y = x^2 + y$

$2x \cdot y + x^2 \cdot y' = 2x + y'$

$2x \cdot y - 2x = y' - x^2 \cdot y'$

$\dfrac{2x\,(y-1)}{(1-x^2)} = y'$

Pàgina 253

37. **Aplica la derivació logarítmica per derivar:**

a) $y = x^{3x}$ **b)** $y = x^{x+1}$

c) $y = x^{e^x}$ **d)** $y = (ln\ x)^{x+1}$

e) $y = \left(\dfrac{sin\ x}{x}\right)^x$ **f)** $y = x^{tg\ x}$

a) $y = x^{3x} \quad \rightarrow \quad ln\ y = 3x\ ln\ x$

$\dfrac{y'}{y} = 3\ ln\ x + 3x \cdot \dfrac{1}{x} = 3\ ln\ x + 3$

$y' = x^{3x}\,(3ln\ x + 3)$

b) $y = x^{x+1} \quad \rightarrow \quad ln\ y = (x+1)\ ln\ x$

$\dfrac{y'}{y} = ln\ x + (x+1) \cdot \dfrac{1}{x} = ln\ x + 1 + \dfrac{1}{x}$

$y' = x^{x+1}\left(ln\ x + 1 + \dfrac{1}{x}\right)$

c) $y = x^{e^x} \quad \rightarrow \quad ln\ y = e^x \cdot ln\ x$

$\dfrac{y'}{y} = e^x \cdot ln\ x + e^x \cdot \dfrac{1}{x} = e^x\left(ln\ x + \dfrac{1}{x}\right)$

$y' = x^{e^x} \cdot e^x\left(ln\ x + \dfrac{1}{x}\right)$

d) $y = (ln\ x)^{x+1} \quad \rightarrow \quad ln\ y = (x+1) \cdot ln\,(ln\ x)$

$\dfrac{y'}{y} = ln\,(ln\ x) + (x+1) \cdot \dfrac{1}{ln\ x} \cdot \dfrac{1}{x} = ln\,(ln\ x) + \dfrac{x+1}{x\ ln\ x}$

$y' = (ln\ x)^{x+1} \cdot \left[ln\,(ln\ x) + \dfrac{x+1}{x\ ln\ x}\right]$

e) $y = \left(\dfrac{sin\ x}{x}\right)^x \quad \rightarrow \quad ln\ y = x\ ln\left(\dfrac{sin\ x}{x}\right) = x\,\big(ln\,(sin\ x) - ln\ x\big)$

$\dfrac{y'}{y} = ln\,(sin\ x) - ln\ x + x\left(\dfrac{cos\ x}{sin\ x} - \dfrac{1}{x}\right) = ln\left(\dfrac{sin\ x}{x}\right) + \dfrac{x\ cos\ x}{sin\ x} - 1$

$y' = \left(\dfrac{sin\ x}{x}\right)^x \cdot \left[ln\left(\dfrac{sin\ x}{x}\right) + \dfrac{x\ cos\ x}{sin\ x} - 1\right]$

f) $y = x^{tg\,x} \;\rightarrow\; ln\,y = tg\,x \cdot ln\,x$

$$\frac{y'}{y} = (1 + tg^2\,x) \cdot ln\,x + tg\,x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = x^{tg\,x} \cdot \left[(1 + tg^2\,x)\;ln\,x + \frac{tg\,x}{x}\right]$$

38. **Obtén la derivada de les funcions següents de dues maneres i comprova, operant-hi, que arribes al mateix resultat:**

I) Utilitzant-hi les regles de derivació que coneixes.

II) Aplicant-hi la derivació logarítmica.

a) $y = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x}\right)^3$ **b)** $y = \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$

c) $y = sin^3\,x\,cos^2\,x$ **d)** $y = \sqrt{x^2 + 1}\;\sqrt[3]{x^2}$

a) I) $y' = 3\left(\dfrac{x^2 + 1}{x}\right)^2 \cdot \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{3 \cdot (x^2 + 1)^2\,(x^2 - 1)}{x^4}$

II) $ln\,y = 3\big(ln\,(x^2 + 1) - ln\,x\big)$

$$\frac{y'}{y} = 3\left(\frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{1}{x}\right) = 3\left(\frac{2x^2 - x^2 - 1}{x(x^2 + 1)}\right) = \frac{3(x^2 - 1)}{x(x^2 + 1)}$$

$$y' = \left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)^3 \cdot \frac{3(x^2 - 1)}{x(x^2 + 1)} = \frac{3 \cdot (x^2 + 1)^2\,(x^2 - 1)}{x^4}$$

b) I) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}} \cdot \dfrac{1 - x + 1 + x}{(1 - x^2)} = \dfrac{1}{\sqrt{(1 + x)(1 - x)^3}}$

II) $ln\,y = \dfrac{1}{2}\,[ln\,(1 + x) - ln\,(1 - x)]$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 + x} - \frac{-1}{1 - x}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1 - x + 1 + x}{(1 + x)(1 - x)}\right] = \frac{1}{(1 + x)(1 - x)}$$

$$y' = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} \cdot \frac{1}{(1 + x)(1 - x)} = \frac{1}{\sqrt{(1 + x)(1 - x)^3}}$$

c) I) $y' = 3sin^2\,x\,cos\,x \cdot cos^2\,x + sin^3\,x \cdot 2cos\,x\,(-sin\,x) =$

$= 3sin^2\,x\,cos^3\,x - 2cos\,x\,sin^4\,x$

II) $ln\,y = 3ln\,(sin\,x) + 2ln\,(cos\,x)$

$$\frac{y'}{y} = 3\,\frac{cos\,x}{sin\,x} + 2 \cdot \frac{-sin\,x}{cos\,x} = \frac{3cos^2\,x - 2sin^2\,x}{sin\,x\,cos\,x}$$

$$y' = sin^3\, x\, cos^2\, x \cdot \frac{3cos^2\, x - 2sin^2\, x}{sin\, x\, cos\, x} = sin^2\, x\, cos\, x\,(3cos^2\, x - 2sin^2\, x) =$$
$$= 3sin^2\, x\, cos^3\, x - 2cos\, x\, sin^4\, x$$

d) I) $y' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^2+1} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{2\sqrt{x^2+1}}{3\sqrt[3]{x}} =$

$$= \frac{3x^2 + 2(x^2+1)}{3\sqrt{x^2+1}\,\sqrt[3]{x}} = \frac{3x^2 + 2x^2 + 2}{3\sqrt{x^2+1}\,\sqrt[3]{x}} = \frac{5x^2+2}{3\sqrt{x^2+1}\,\sqrt[3]{x}}$$

II) $ln\, y = \dfrac{1}{2}\, ln\,(x^2+1) + \dfrac{2}{3}\, ln\, x$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{2}{3x} = \frac{3x^2 + 2x^2 + 2}{3x(x^2+1)} = \frac{5x^2+2}{3x(x^2+1)}$$

$$y' = \sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \frac{5x^2+2}{3x(x^2+1)} = \frac{5x^2+2}{3\sqrt{x^2+1}\,\sqrt[3]{x}}$$

39. Calcula el valor de la derivada de cada una de les funcions següents en $x = 0$.

a) $g(x) = e^{sin\, f(x)}$, si $f(0) = 0$ i $f'(0) = 1$

b) $h(x) = [sin\, f(x)]^3$, si $f(0) = \dfrac{\pi}{4}$ i $f'(0) = 1$

c) $j(x) = \sqrt{ln\, f(x)}$, si $f(0) = e$ i $f'(0) = 1$

a) $g'(x) = e^{sin\, f(x)} \cdot cos\, f(x) \cdot f'(x)$

$g'(0) = e^{sin\, f(0)} \cdot cos\, f(0) \cdot f'(0)$

$g'(0) = e^{sin\, 0} \cdot cos\, 0 \cdot 1$

$g'(0) = 1$

b) $h'(x) = 3\,[sin\, f(x)]^2 \cdot cos\, f(x) \cdot f'(x)$

$h'(0) = 3\,[sin\, f(0)]^2 \cdot cos\, f(0) \cdot f'(0)$

$h'(0) = 3\left[sin\, \dfrac{\pi}{4}\right]^2 \cdot cos\, \dfrac{\pi}{4} \cdot 1$

$h'(0) = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

c) $j'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{ln\, f(x)}} \cdot \dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$

$j'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{ln\, f(0)}} \cdot \dfrac{1}{f(0)} \cdot f'(0)$

$j'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{ln\, e}} \cdot \dfrac{1}{e} \cdot 1$

$j'(0) = \dfrac{1}{2e}$

Pàgina 254

40. **a) Comprova que la funció següent és contínua i derivable i troba $f'(0)$, $f'(3)$ i $f'(1)$:**

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b) Quina n'és la funció derivada?

c) En quin punt es compleix $f'(x) = 5$?

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) **Si $x \neq 1$,** la funció és contínua i derivable, atès que està formada per dos polinomis.

Continuïtat en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (3x - 1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 + x) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} f(x) \text{ és contínua en } x = 1.$$

Derivabilitat en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 3 = 3 = f'(1^-) \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x + 1) = 3 = f'(1^+) \end{array}\right\} \text{Les derivades laterals existeixen i coincideixen.}$$

Per tant, $f(x)$ és derivable en $x = 1$. A més, $f'(1) = 3$.

Així $f(x)$ és contínua i derivable en tot $\mathbb{R}$.

$f'(0) = 3$

$f'(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

b) $f'(x) = \begin{cases} 3 & x < 1 \\ 2x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$

c) Si $f'(x) = 5$, aleshores $x \geq 1$. És a dir:

$f'(x) = 2x + 1 = 5 \quad \to \quad x = \dfrac{4}{2} = 2 > 1$

$f'(2) = 5$

41. **Comprova que $f(x)$ és contínua però no derivable en $x = 2$:**

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x-1) & \text{si } x < 2 \\ 3x - 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- Si $x \neq 2$, la funció és contínua i derivable.
- Continuïtat en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \ln(x-1) = \ln 1 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (3x-6) = 0 \\ f(2) = 0 \end{array}\right\} \; f \text{ és contínua en } x = 2.$$

- Derivabilitat en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{x-1} = 1 = f'(2^-) \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} 3 = 3 = f'(2^+) \end{array}\right\}$$ Les derivades laterals existeixen, però no coincideixen.

$f(x)$ no és derivable en $x = 2$.

42. **Estudia la continuïtat i derivabilitat d'aquestes funcions:**

a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + 8x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) **Si $x \neq 0$ i $x \neq 3$,** la funció és contínua i derivable.

Continuïtat en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \; f(x) \text{ és contínua en } x = 0.$$

Continuïtat en $x = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (-x^2 + 3x + 2) = 2 \\ f(3) = 2 \end{array}\right\}$$ Els límits per la dreta i per l'esquerra no coincideixen. La funció no és contínua en $x = 3$.

Derivabilitat en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = 1 = f'(0^-) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 0 = 0 = f'(0^+) \end{array}\right\}$$ Les derivades laterals existeixen, però no coincideixen.

$f(x)$ no és derivable en $x = 0$.

Derivabilitat en $x = 3$:

Com que $f(x)$ no és contínua en $x = 3$, $f(x)$ no és derivable en $x = 3$.

b) **Si $x \neq -1$ i $x \neq 2$,** $f(x)$ és contínua i derivable.

Continuïtat en $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x^2 + 2x + 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (2x + 2) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{array}\right\}$$ $f(x)$ és contínua en $x = -1$.

Continuïtat en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (2x + 2) = 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (-x^2 + 8x) = 12 \\ f(2) = 12 \end{array}\right\}$$ Els límits per la dreta i per l'esquerra no coincideixen.

$f(x)$ no és contínua en $x = 2$.

Derivabilitat en $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (2x + 2) = 0 = f'(2^-) \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} 2 = 2 = f'(2^+) \end{array}\right\}$$ Les derivades laterals existeixen, però no coincideixen.

$f(x)$ no és derivable en $x = -1$.

Derivabilitat en $x = 2$:

$f(x)$ no és contínua en $x = 2$ $\rightarrow$ $f(x)$ no és derivable en $x = 2$.

43. **Estudia la continuïtat i derivabilitat d'aquestes funcions:**

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leq 2 \\ 1 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) **Continuïtat:**

- **Si $x \neq 0$ i $x \neq 1$** $\rightarrow$ És contínua, ja que està formada per funcions contínues.
- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0).$$

Així doncs, la funció és contínua en $x = 0$.

- **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x = 1 \\ f(1) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1).$$

Així doncs, la funció és contínua en $x = 1$.

La funció és contínua en $\mathbb{R}$.

Derivabilitat:

- **Si $x \neq 0$ i $x \neq 1$** $\rightarrow$ La funció és derivable. La seva derivada és, en aquests punts:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- **En $x = 0$:**

$f'(0^-) = 0 = f'(0^+)$. Per tant, $f(x)$ és derivable en $x = 0$; i $f'(0) = 0$.

- **En $x = 1$:**

$f'(1^-) = 2 \neq f'(1^+) = 1$. Per tant, $f(x)$ no és derivable en $x = 1$.

La funció és derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$. La seva derivada és:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) **Avaluem la continuïtat**

tros 1

e^{-x} és contínua perquè és exponencial.

tros 2

$1 - x$ és contínua perquè és polinòmica.

L'únic punt conflictiu per la continuïtat pot ser la frontera entre els trossos.

$x = 0$

$f(0) = e^{-0} = 1 \in \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} e^{-x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (1 - x) = 1 \end{array}\right\} \quad \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$$

$$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$$

La funció és contínua també en $x = 0$.

La funció és contínua.

Avaluem la derivabilitat

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Els dos trossos no causen cap problema. L'únic problema el podríem trobar en la frontera $x = 0$.

$x = 0$

$-e^{-0} = -1 \quad \rightarrow \quad$ És derivable també en $x = 0$

La funció és contínua i derivable en tots els punts.

44. **Estudia la derivabilitat de les funcions següents:**

a) $y = |x - 2|$ **b)** $y = |x^2 + 6x + 8|$

c) $y = x|x|$ **d)** $y = x^2 + |x|$

a) $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \geq 2 \\ 2 - x & \text{si } x < 2 \end{cases}$

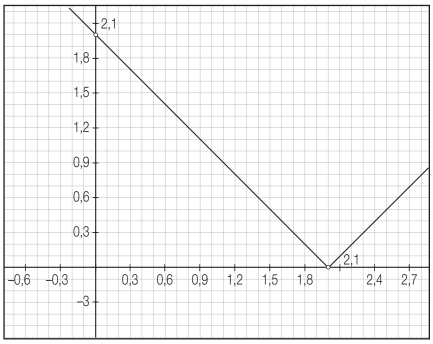
En el tros 1 i en el tros 2 és contínua perquè són polinomis.

En la frontera $x = 2$

$f(2) = 0$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 0$$

És contínua en $x = 2$ i, per tant, és contínua.



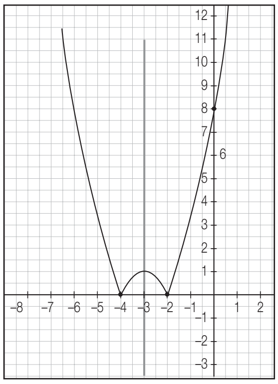
Avaluem la derivabilitat

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 2 \\ -1 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

És derivable en el tros 1 i en el tros 2.

En la frontera $x = 2$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = -1 \\ f'(2^+) = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{No és derivable en } x = 2 \\ \text{Hi ha un pic} \end{array}$$



b) $f(x) = |x^2 + 6x + 8|$

$$x^2 + 6x + 8 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} x = -2 \\ x = -4 \end{array}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 8 & \text{si } \ x \leq -4 \\ -x^2 - 6x - 8 & \text{si } \ -4 < x < -2 \\ x^2 + 6x + 8 & \text{si } \ x \geq -2 \end{cases}$$

Avaluem la continuïtat

En els trossos la funció és polinòmica.

Cal mirar què passa en les fronteres.

***x* = –4**

$f(-4) = 0$

$\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = 0$. És contínua en $x = -4$

***x* = –2**

$f(-2) = 0$

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 0$. És contínua en $x = -2$

Avaluem la derivabilitat

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } \ x < -4 \\ -2x - 6 & \text{si } \ -2 < x < -4 \\ 2x + 6 & \text{si } \ x > -2 \end{cases}$$

En els trossos no hi ha problema ja que són polinomis.

En les fronteres cal avaluar-ho.

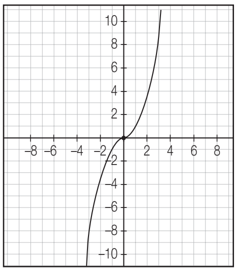
***x* = –4**

$$\left.\begin{array}{l} f'(-4^-) = 2 \cdot (-4) + 6 = -2 \\ f'(-4^+) = -2 \cdot (-4) - 6 = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{No és derivable en } x = -4 \\ \text{Hi ha un pic} \end{array}$$

***x* = –2**

$$\left.\begin{array}{l} f'(-2^-) = -2 \cdot (-2) - 6 = -2 \\ f'(-2^+) = 2 \cdot (-2) + 6 = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{No és derivable en } x = -2 \\ \text{Hi ha un pic} \end{array}$$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$



Avaluem la continuïtat

En els trossos és contínua ja que són polinomis.

En la frontera ho comprovem.

$\boldsymbol{x = 0}$

$f(0) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 = 0$. És contínua en $x = 0$ i la funció és contínua.

Avaluem la derivabilitat

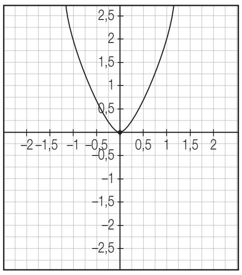
$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x > 0 \\ -2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En els trossos no hi ha problema ja que són polinomis.

En la frontera ho comprovem

$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 0 \end{array}\right\}$ És derivable. No hi ha pic en $x = 0$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 - x & \text{si } x < 0 \end{cases}$



Avaluem la continuïtat

En els trossos no hi ha problema ja que són polinomis.

Cal avaluar la frontera.

$\boldsymbol{x = 0}$

$f(0) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$. És contínua en $x = 0$ i la funció és contínua.

Avaluem la derivabilitat

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x > 0 \\ 2x - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En els trossos no hi ha problema ja que són polinomis.

Cal avaluar la frontera

$\boldsymbol{x = 0}$

$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = 1 \end{array}\right\}$ És derivable. No hi ha pic en $x = 0$

45. **Utilitza la definició de derivada per trobar $f'(2)$ en cada cas:**

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ **b)** $f(x) = \sqrt{x+2}$

a) $$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{2+h-1}{2+h+1} - \dfrac{1}{3}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{h+1}{h+3} - \dfrac{1}{3}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3h+3-h-3}{3\,(h+3)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{2h}{3\,(h+3)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2}{3\,(h+3)} = \frac{2}{3\,(0+3)} = \frac{2}{9}$$

b) $$f'(2) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{\sqrt{2+h+2} - \sqrt{2+2}}{h}\right] = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h+4} - 2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h+4} - 2}{h} \cdot \frac{\sqrt{h+4} + 2}{\sqrt{h+4} + 2} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{h+4-4}{h(\sqrt{h+4} + 2)}\right] = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{h+4} + 2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{0+4} + 2} = \frac{1}{4}$$

46. **Aplica la definició de derivada per trobar $f'(x)$ en cada cas:**

a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ **b)** $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

a) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(x + h + \dfrac{1}{x+h}\right) - \left(x + \dfrac{1}{x}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h + \dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{(x+h) \cdot x \cdot h + x - (x+h)}{(x+h) \cdot x}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{x^2 h + x h^2 + x - x - h}{(x+h) \cdot x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{x^2 h + x h^2 - h}{(x+h) \cdot x}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{(x+h) \cdot x \cdot h - h}{(x+h) \cdot x}}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{(x+h) \cdot x \cdot h}{(x+h) \cdot x \cdot h} - \frac{h}{(x+h) \cdot x \cdot h}\right] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(1 - \frac{1}{(x+h) \cdot x}\right) = 1 - \frac{1}{x^2} = f'(x)$$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \left[\dfrac{\sqrt{(x+h)^2+1} - \sqrt{x^2+1}}{h} \right] =$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\sqrt{(x+h)^2+1} - \sqrt{x^2+1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{(x+h)^2+1} + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{(x+h)^2+1} + \sqrt{x^2+1}} \right] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2+1-x^2-1}{h\left(\sqrt{(x+h)^2+1} + \sqrt{x^2+1}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{2hx+h^2}{h\left(\sqrt{(x+h)^2+1} + \sqrt{x^2+1}\right)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2x+h}{\sqrt{(x+h)^2+1} + \sqrt{x^2+1})} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = f'(x)$$

PER RESOLDRE

47. Calcula els punts de derivada nul·la de les funcions següents:

a) $\boldsymbol{y = \dfrac{x}{(x+3)^2}}$ **b)** $\boldsymbol{y = \dfrac{16}{x^2(x-4)}}$

c) $\boldsymbol{y = \dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}$ **d)** $\boldsymbol{y = e^x(x-1)}$

e) $\boldsymbol{y = x^2 e^x}$ **f)** $\boldsymbol{y = \sin x + \cos x}$

a) $y' = \dfrac{(x+3)^2 - 2(x+3)x}{(x+3)^4} = \dfrac{(x+3) - 2x}{(x+3)^3} = \dfrac{3-x}{(x+3)^3}$

$y' = 0 \rightarrow 3 - x = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow y = \dfrac{1}{12}$

S'anul·la en el punt $\left(3, \dfrac{1}{12}\right)$.

b) $y = \dfrac{16}{x^3 - 4x^2} \rightarrow y' = \dfrac{-16(3x^2 - 8x)}{(x^3-4x^2)^2}$

$y' = 0 \rightarrow 3x^2 - 8x = 0 \rightarrow x(3x-8) = 0 \begin{cases} x = 0 \ \ \text{(no val)} \\ x = \dfrac{8}{3} \rightarrow y = \dfrac{-27}{16} \end{cases}$

$x = 0$ no apareix en el domini.

La derivada s'anul·la en el punt $\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{-27}{16}\right)$.

c) $y' = \dfrac{(2x-1)(x^2+x+1) - (x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} =$

$$= \frac{\cancel{2x^3} + \cancel{2x^2} + \cancel{2x} - \cancel{x^2} - \cancel{x} - 1 - \cancel{2x^3} - \cancel{x^2} + \cancel{2x^2} + \cancel{x} - \cancel{2x} - 1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x^2-2}{(x^2+x+1)^2}$$

$$y' = 0 \;\rightarrow\; 2x^2 - 2 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = 1 \begin{cases} x = 1 \;\rightarrow\; y = \dfrac{1}{3} \\ x = -1 \;\rightarrow\; y = 3 \end{cases}$$

S'anul·la en els punts $(-1, 3)$ i $\left(1, \dfrac{1}{3}\right)$.

d) $y' = e^x (x - 1) + e^x = e^x (x - 1 + 1) = xe^x$

$y' = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = -1$

S'anul·la en el punt $(0, -1)$.

e) $y' = 2x\, e^x + x^2\, e^x = e^x (2x + x^2)$

$$y' = 0 \;\rightarrow\; 2x + x^2 = 0 \;\rightarrow\; x(2 + x) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = -2 \;\rightarrow\; y = 4e^{-2} \end{cases}$$

S'anul·la en els punts $(0, 0)$ i $(-2, 4e^{-2})$.

f) $y' = \cos x - \sin x$

$$y' = 0 \;\rightarrow\; \cos x = \sin x \;\rightarrow\; tg\, x = 1 \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \;\rightarrow\; y = \sqrt{2} \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k \;\rightarrow\; y = -\sqrt{2} \end{cases}$$

S'anul·la en els punts $\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, \sqrt{2}\right), \left(\dfrac{5\pi}{4} + 2\,\pi k, -\sqrt{2}\right)$, amb $k \in \mathbb{Z}$.

48. Considera la funció: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & \text{si } x \le 1 \\ -x^2 + nx & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Calcula m i n perquè f sigui derivable en tot $\mathbb{R}$.

b) En quins punts és $f'(x) = 0$?

a) Perquè sigui derivable, en primer lloc ha de ser contínua.

- **Si $x \neq 1$,** la funció és contínua, ja que està formada per dos polinomis.
- **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 5x + m) = -4 + m \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (-x^2 + nx) = -1 + n \\ f(1) = -4 + m \end{array}\right\}$$

Perquè sigui contínua en $x = 1$, ha de ser: $-4 + m = -1 + n$; és a dir: $m = n + 3$.

Derivabilitat:

- **Si $x \neq 1$,** la funció és derivable. A més:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 1 \\ -2x + n & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- **En $x = 1$:**

$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = -3 \\ f'(1^+) = -2 + n \end{array}\right\}$ Perquè sigui derivable en $x = 1$, ha de ser $-3 = -2 + n$, és a dir, $n = -1$.

Per tant, la funció serà derivable en tot $\mathbb{R}$ si $m = 2$ i $n = -1$. En aquest cas, la derivada seria:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 1 \\ -2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b) $f'(x) = 2x - 5$ si $x < 1$

$$2x - 5 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{5}{2}; \text{ però } \frac{5}{2} > 1$$

$f'(x) = -2x - 1$ si $x \geq 1$

$$-2x - 1 = 0 \;\rightarrow\; x = -\frac{1}{2}; \text{ però } -\frac{1}{2} < 1$$

Per tant, $f'(x)$ no s'anul·la en cap punt.

49. **Calcula a i b perquè la funció següent sigui derivable en tot $\mathbb{R}$:**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Perquè sigui derivable, en primer lloc, ha de ser contínua.

- **Si $x \neq 2$** $\rightarrow$ La funció és contínua, ja que està formada per dos polinomis.
- **En $x = 2$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (ax^2 + 3x) = 4a + 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 - bx - 4) = -2b \\ f(2) = 4a + 6 \end{array}\right\}$$

Perquè sigui contínua, ha de ser $4a + 6 = -2b$, és a dir, $2a + 3 = b$; o bé $b = -2a - 3$.

Derivabilitat:

- **Si $x \neq 2$** $\rightarrow$ la funció és derivable. A més:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & \text{si } x < 2 \\ 2x - b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- **En $x = 2$:**

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 4a + 3 \\ f'(2^+) = 4 - b \end{array}\right\}$$ Perquè sigui derivable ha de ser $4a + 3 = 4 - b$, és a dir, $b = -4a + 1$.

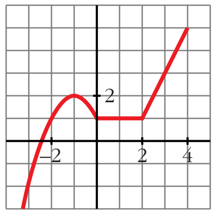
Tenint en compte les dues condicions obtingudes:

$$\left.\begin{array}{l} b = -2a - 3 \\ b = -4a + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2a - 3 = -4a + 1 \;\rightarrow\; 2a = 4 \;\rightarrow\; a = 2 \\ b = -7 \end{array}$$

Per tant, perquè $f(x)$ sigui derivable en tot $\mathbb{R}$, ha de ser $a = 2$ i $b = -7$.

50. **Aquesta és la gràfica d'una funció $y = f(x)$. Calcula, observant-la: $f'(-1)$, $f'(1)$ i $f'(3)$**

En quins punts no és derivable?

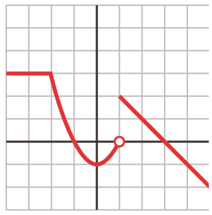


$f'(-1) = 0$; $f'(1) = 0$; $f'(3) = 2$

No és derivable en $x = 0$ ni en $x = 2$.

51. **Observant la gràfica d'aquesta funció f, estudia'n la derivabilitat.**

Troba, si existeix: $f'(-3)$, $f'(0)$, $f'(3)$.



$f(x)$ no és derivable en $x = -2$ ni en $x = 1$

$f'(-3^+) = f'(-3^-) = 0$ sí és derivable en $x = -3$

$f'(0^-) = f'(0^+) = 0$ sí és derivable en $x = 0$

$f'(3^+) = f'(3^-) = -1$ sí és derivable en $x = 3$

52. **Donada la funció $f(x) = e^{sin\ x}$, troba: $f'(x)$, $f''(x)$ i $f'''(x)$.**

$f'(x) = cos\ x\ e^{sin\ x}$

$f''(x) = -sin\ x\ e^{sin\ x} + cos^2\ x\ e^{sin\ x} = (cos^2\ x - sin\ x)\ e^{sin\ x}$

$f'''(x) = (2cos\ x(-sin\ x) - cos\ x)\ e^{sin\ x} + (cos^2\ x - sin\ x)\ cos\ x\ e^{sin\ x} =$

$= (-2sin\ x\ cos\ x - cos\ x + cos^3\ x - sin\ x\ cos\ x)\ e^{sin\ x} =$

$= (cos^3\ x - 3sin\ x\ cos\ x - cos\ x)\ e^{sin\ x}$

53. **Donades $f(x) = x^2$ i $g(x) = 3x + 1$, troba**

a) $(f \circ g)'(x)$ **b) $(g \circ f)'(x)$**

a) $(f \circ g)(x) = (3x + 1)^2$ $(f \circ g)'(x) = 2 \cdot (3x + 1) \cdot 3 = 6\ (3x + 1) = 18x + 6$

b) $(g \circ f)(x) = 3x^2 + 1$ $(g \circ f)'(x) = 6x$

Pàgina 255

54. **Sigui la funció: $f(x) = x\ |x| = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$**

a) Troba $f'(x)$.

b) Troba $f''(x)$.

c) Representa f' i f''.

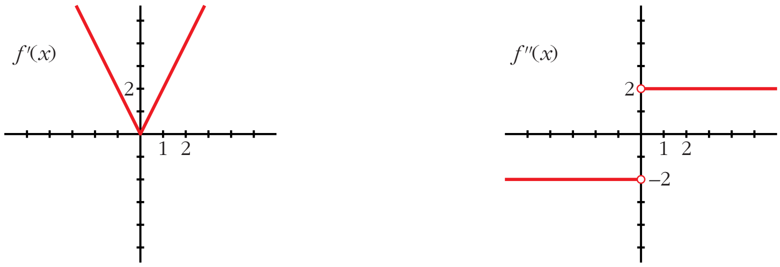
a) $f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

En $x = 0$ existeix la derivada, ja que $f(x)$ és contínua, i, a més, $f'(0^-) = f'(0^+)$.

b) $f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

En $x = 0$ no existeix la segona derivada, ja que $f''(0^-) \neq f''(0^+)$.

c)



55. **Estudia la derivabilitat de la funció: $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ i calcula $f'(1)$.**

$f'(x) = \dfrac{-2}{3\sqrt[3]{x}}$

$f(x)$ és una funció contínua en $\mathbb{R}$.

$f(x)$ és derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ (en $x = 0$ no existeix la derivada).

$f'(1) = \dfrac{-2}{3}$

56. **Troba el valor de la derivada de la funció: $\cos(x + y) + \sin(x - y) = 0$ en el punt $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.**

Derivem:

$$-\sin(x + y) \cdot (1 + y') + \cos(x - y) \cdot (1 - y') = 0$$

$$-\sin(x + y) - y' \sin(x + y) + \cos(x - y) - y' \cos(x - y) = 0$$

$$-\sin(x + y) + \cos(x - y) = y' \left(\sin(x + y) + \cos(x - y)\right)$$

$$y' = \frac{-\sin(x + y) + \cos(x - y)}{\sin(x + y) + \cos(x - y)}$$

Calculem la derivada en el punt $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$:

$$y'\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1 + 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

57. **Calcula la derivada d'ordre n de la funció $f(x) = e^{2x}$.**

$f'(x) = 2e^{2x}$

$f''(x) = 4e^{2x} = 2^2e^{2x}$

$f'''(x) = 8e^{2x} = 2^3e^{2x}$

...

$f^n(x) = 2^n e^{2x}$

Ho demostrem per inducció:

Per a $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, veiem que es compleix.

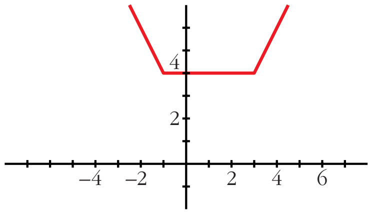
Suposem que és cert per a $n - 1$; és a dir, que $f^{n-1}(x) = 2^{n-1}e^{2x}$; aleshores, derivant, tenim que: $f^{n}(x) = 2 \cdot 2^{n-1}e^{2x} = 2^{n}e^{2x}$. Per tant, l'expressió obtinguda és certa per a tot n.

58. a) Representa la funció següent: $f(x) = |x + 1| + |x - 3|$

Observant la gràfica, digues en quins punts no és derivable.

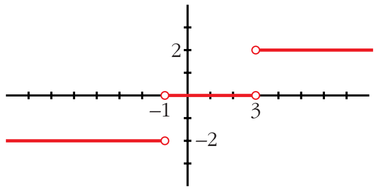
b) Representa $f'(x)$.

a) $f(x) = \left\{\begin{array}{lll} -x - 1 - x + 3 & \text{si} & x < -1 \\ x + 1 - x + 3 & \text{si} & -1 \le x \le 3 \\ x + 1 + x - 3 & \text{si} & x > 3 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{lll} -2x + 2 & \text{si} & x < -1 \\ 4 & \text{si} & -1 \le x \le 3 \\ 2x - 2 & \text{si} & x > 3 \end{array}\right.$



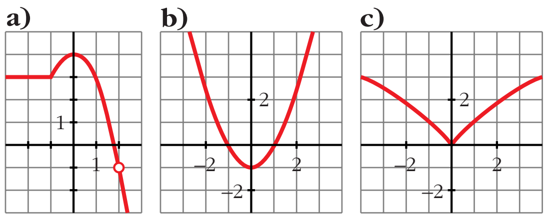
No és derivable en $x = -1$ ni en $x = 3$. (Són punts "angulosos").

b) $f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$



59. Observa les gràfiques de les funcions següents i indica en quins punts no són derivables.

Alguna d'aquestes és derivable en tot $\mathbb{R}$?



a) No és derivable en $x = -1$ (té un punt "angulós") ni en $x = 2$ (no està definida la funció).

b) És derivable en tot $\mathbb{R}$.

c) No és derivable en $x = 0$ (té un punt "angulós").

60. La funció $f(x)$ està definida per:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x \le 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Calcula a i b perquè f sigui contínua i derivable.

Continuïtat:

- **En $x \neq 0$** $\rightarrow$ La funció és contínua, ja que està formada per dos polinomis.
- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^3 - x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (ax + b) = b \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \text{ Perquè sigui contínua ha de ser } b = 0$$

Derivabilitat:

- **Si $x \neq 0$** $\rightarrow$ La funció és derivable. A més:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = a \end{array}\right\} \text{ Perquè sigui derivable, ha de ser } a = -1.$$

Així doncs, $f(x)$ serà contínua i derivable si $a = -1$ i $b = 0$.

61. Estudia la continuïtat i derivabilitat d'aquesta funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Hi ha algun punt en què $f'(x) = 0$?

Representa'l gràficament.

Continuïtat:

- **En $x \neq 1$:** La funció és contínua, ja que està formada per dos polinomis.
- **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 2x - 1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1). \text{ Per tant, la funció és contínua en } x = 1.$$

La funció és contínua en tot $\mathbb{R}$.

Derivabilitat:

- **Si $x \neq 1$:** La funció és derivable. A més:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

• **En $x = 1$:**

$f'(1^-) = 4 \neq f'(1^+) = 1$

La funció no és derivable en $x = 1$.

Per tant, la funció és derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$.

Punts en els quals $f'(x) = 0$:

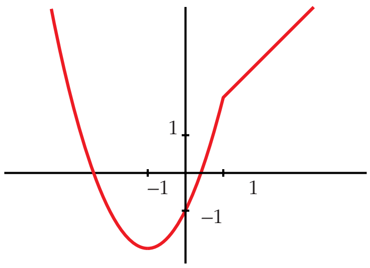
$f'(x) = 2x + 2$ si $x < 1$

$2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$

$f'(x) = 1$ si $x > 1 \rightarrow f'(x) \neq 0$ si $x > 1$

Per tant, la derivada s'anul·la en $x = -1$.

Gràfica de $f(x)$:



62. **Troba a i b perquè la funció $f(x)$ sigui contínua:**

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

Per als valors de a i b obtinguts, estudia la derivabilitat de f.

• **Si $x \neq -1$ i $x \neq 0$:** La funció és contínua, ja que està formada per polinomis.

• **En $x = -1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (2x + a) = -2 + a \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (ax + b) = -a + b \\ f(-1) = -a + b \end{array}\right\}$$

Perquè sigui contínua, ha de ser $-2 + a = -a + b$, és a dir: $b = 2a - 2$.

• **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (ax + b) = b \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (3x^2 + 2) = 2 \\ f(0) = 2 \end{array}\right\}$$

Perquè sigui contínua, ha de ser $b = 2$.

Així doncs, $f(x)$ serà contínua si $a = 2$ i $b = 2$.

Per a aquests valors, queda:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \leq x < 0; \text{ és a dir:} \\ 3x^2 + 2 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Derivabilitat:

- **Si $x \neq 0$:** És derivable. A més:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ 6x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

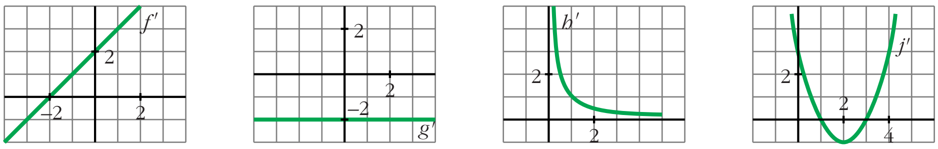
- **En $x = 0$:**

$f'(0^-) = 2 \neq f'(0^+) = 0$

La funció no és derivable en $x = 0$.

Per tant, és derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

63. **Aquestes gràfiques representen les funcions derivades de les funcions f, g, h i j:**



a) Quines d'aquestes funcions tenen punts de tangent horitzontal?

b) Quina d'aquestes gràfiques és la funció derivada d'una funció polinòmica de primer grau?

c) Quina d'aquestes correspon a una funció polinòmica de segon grau?

a) Els punts de tangent horitzontal són els punts en els quals s'anul·la la derivada.

f té un punt de tangent horitzontal en $x = -2$, ja que $f'(-2) = 0$.

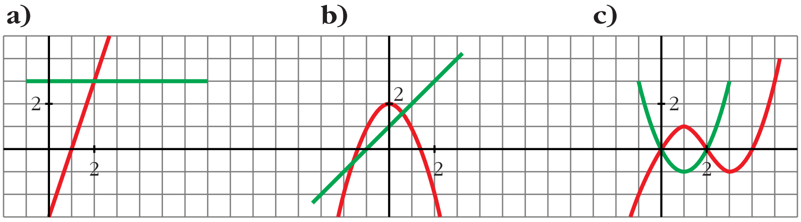
j té dos punts de tangent horitzontal en $x = 1$ i en $x = 3$, ja que $j'(1) = j'(3) = 0$.

g i h no tenen cap punt de tangent horitzontal.

b) La derivada d'una funció polinòmica de primer grau és una funció constant. Per tant, és g'.

c) La derivada d'una funció polinòmica de segon grau és una funció polinòmica de primer grau. Per tant, és f'.

64. **Quina d'aquestes gràfiques representa la funció f i quina la seva derivada f'? Justifica la teva resposta.**



a) La funció és una recta que té pendent 3. Per tant, la seva derivada és $y = 3$. Així doncs, aquestes gràfiques *sí* representen una funció i la seva derivada.

b) En $x = 0$, la funció té un màxim; la derivada s'anul·la. La recta hauria de passar per (0, 0).

No representen, per tant, una funció i la seva derivada.

c) En $x = 1$, la funció té un màxim; la derivada s'anul·la, i hauria de passar per (1, 0). Aquestes *tampoc* no representen una funció i la seva derivada.

Per tant, només la primera és vàlida.

Pàgina 256

65. **Troba els punts de derivada nul·la de la funció $y = (3x - 2x^2)\,e^x$.**

$$y' = (3 - 4x)\,e^x + (3x - 2x^2)\,e^x = (3 - 4x + 3x - 2x^2)\,e^x = (-2x^2 - x + 3)\,e^x$$

$$y' = 0 \;\rightarrow\; -2x^2 - x + 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-4} = \frac{1 \pm 5}{-4} \begin{cases} x = \dfrac{-3}{2} \\ x = 1 \end{cases}$$

66. **Donada la funció $f(x) = e^x + \ln(1 - x)$, comprova que $f'(0) = 0$ i $f''(0) = 0$. Serà també $f'''(0) = 0$?**

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{1 - x} \;\rightarrow\; f'(0) = 1 - 1 = 0$$

$$f''(x) = e^x - \frac{1}{(1 - x)^2} \;\rightarrow\; f''(0) = 1 - 1 = 0$$

$$f'''(x) = e^x - \frac{2}{(1 - x)^3} \;\rightarrow\; f'''(0) = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

67. **Estudia la continuïtat i derivabilitat d'aquesta funció:**

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{2x\,(x - 3)}{x^2 - 9} & \text{si } x \neq 0,\; x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{2x(x-3)}{(x-3)(x+3)} & \text{si } x \neq 0,\ x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{2x}{x+3} & \text{si } x \neq 0,\ x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

El domini de la funció és $\mathbb{R} - \{-3\}$. Per tant, en $x = -3$ no és contínua (ni derivable), ja que no està definida.

Continuïtat:

- **En $x \neq 0$, $x \neq 3$ i $x \neq -3$:** És contínua, ja que les funcions que la formen són contínues en aquest cas.

- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{x+3} = 0 \\ f(0) = -1 \end{array}\right\}$$

No és contínua en $x = 0$ (té una discontinuïtat evitable).

- **En $x = 3$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x}{x+3} = 1 \\ f(3) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3).$$

La funció és contínua en $x = 3$.

- **En $x = -3$:** *No* és contínua, ja que no està definida.

Per tant, $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R} - \{-3, 0\}$.

Derivabilitat:

- **Si $x \neq 0$, $x \neq 3$ i $x \neq -3$:** És derivable. A més: $f'(x) = \dfrac{6}{(x+3)^2}$.

- **En $x = 0$ i en $x = -3$:** *No* és derivable, ja que no és contínua.

- **En $x = 3$:** *Sí* és derivable, ja que $f'(3^-) = f'(3^+) = f'(3) = \dfrac{1}{6}$.

Per tant, $f(x)$ és derivable en $\mathbb{R} - \{-3, 0\}$. A més:

$$f'(x) = \frac{6}{(x+3)^2} \quad \text{si } x \neq 0 \text{ i } x \neq -3$$

68. Determina, si és possible, el valor del paràmetre a perquè la funció f sigui derivable en tot el seu domini de definició:

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ a(1 - e^{1-x}) & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Perquè $f(x)$ sigui derivable, en primer lloc, ha de ser contínua.

- **Si $x > 0$, $x \neq 1$:** La funció és contínua, ja que està formada per funcions contínues.

• **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x \ln x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} [a(1 - e^{1-x})] = 0 \\ f(1) = 0 \end{array}\right\} \; f(x) \text{ és contínua en } x = 0.$$

Derivabilitat

• **Si $x > 0$, $x \neq 1$:** és derivable. A més:

$$f'(x) = \begin{cases} \ln x + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ ae^{1-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

• **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 1 \\ f'(1^+) = a \end{array}\right\} f(x) \text{ és derivable en } x = 1 \text{ si } a = 1.$$

Així doncs, perquè f sigui derivable en tot el domini de definició, ha de ser $a = 1$.

69. Estudia la derivabilitat en $x = 0$ de la funció:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{x^2} & x \leq 0 \\ 1 - \sqrt[3]{x^2} & x > 0 \end{cases}$$

Com que $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 1$, la funció és contínua en $x = 0$.

Vegem si és derivable:

• **Si $x \neq 0$,** tenim que:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-2}{3\sqrt[3]{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

No existeixen les derivades laterals en $x = 0$. Per tant, $f(x)$ *no* és derivable en $x = 0$.

70. Estudia la continuïtat i derivabilitat de les funcions següents:

a) $f(x) = \dfrac{1}{1 + |x|}$ **b)** $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2 - 1}$

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{1 + x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Continuïtat:

- **Si $x \neq 0$** $\rightarrow$ És contínua, ja que està formada per dues funcions contínues en els intervals en què estan definides.

- **Si $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 - x} = 1 \\[2ex] \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + x} = 1 \\[2ex] f(0) = 1 \end{array}\right\} \quad \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0). \text{ És contínua en } x = 0.$$

Així doncs, és una funció contínua en $\mathbb{R}$.

Derivabilitat:

- **Si $x \neq 0$:** És derivable. A més:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1 - x)^2} & \text{si } x < 0 \\[2ex] \dfrac{-1}{(1 + x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- **En $x = 0$:**

  $f'(0^-) = 1 \neq f'(0^+) = -1$

  No és derivable en $x = 0$.

Per tant, és derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x^2 - 1} & \text{si } x < 0 \\[2ex] \dfrac{x}{x^2 - 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

El domini de la funció és $D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Per tant, en $x = -1$ i en $x = 1$, la funció no és contínua (ni derivable).

Continuïtat:

- **Si $x \neq 0$, $x \neq -1$, $x \neq 1$:** La funció és contínua, ja que està formada per funcions contínues (en aquests punts).

- **En $x = -1$ i en $x = 1$:** No és contínua, ja que no està definida en aquests punts.

- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x}{x^2 - 1} = 0 \\[2ex] \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2 - 1} = 0 \\[2ex] f(0) = 0 \end{array}\right\} \quad \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0). \text{ La funció és contínua en } x = 0.$$

Per tant, és una funció contínua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Derivabilitat:

- **Si $x \neq 0$, $x \neq -1$, $x \neq 1$:** És derivable. A més:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- **En $x = -1$ i en $x = 1$:** No és derivable, ja que no està definida la funció.

- **En $x = 0$:**

$f'(0^-) = 1 \neq f'(0^+) = -1$. No és derivable en $x = 0$.

Per tant, és derivable en $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$.

71. **Prova que $D\left[arc\ tg\ \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right] = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$**

$$D\left[arc\ tg\ \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right] = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{\left(1 + \dfrac{e^{2x} - e^{-2x} - 2}{4}\right) \cdot 2} =$$

$$= \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot 4}{(e^{2x} + e^{-2x} + 2) \cdot 2} = \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot 2}{(e^x + e^{-x}) \cdot 2} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

72. **Demostra que la derivada de la funció: $y = arc\ tg \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$ amb $0 \leq x \leq \pi$ és una constant.**

☛ ***Recorda la fórmula de $tg\ \dfrac{x}{2}$.***

Si $0 \leq x \leq \pi \rightarrow 0 \leq \dfrac{x}{2} \leq \dfrac{\pi}{2} \rightarrow tg\ \dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$

Així: $y = arc\ tg \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = arc\ tg\left(tg\ \dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{x}{2}$

Per tant: $y' = \dfrac{1}{2}$

73. **Si $f(x) = x^2|x|$, troba f', f'' y f'''.**

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Derivant:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(En $x = 0$, tenim que $f'(0^-) = f'(0^+) = f'(0) = 0$).

$$f''(x) = \begin{cases} -6x & \text{si } x < 0 \\ 6x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(En $x = 0$, tenim que $f''(0^-) = f''(0^+) = f''(0) = 0$).

$$f'''(x) = \begin{cases} -6 & \text{si } x < 0 \\ 6 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(En $x = 0$ no existeix f''', ja que $f'''(0^-) = -6 \neq f'''(0^+) = 6$).

74. Troba els punts de derivada nul·la de la funció $y = \cos 2x - 2\cos x$.

$y' = -\sin 2x \cdot 2 - 2 \cdot (-\sin x) = -2\sin 2x + 2\sin x =$

$= -2 \cdot 2\sin x \cdot \cos x + 2\sin x = 2\sin x\,(-2\cos x + 1)$

$y' = 0 \;\rightarrow\; 2\sin x\,(-2\cos x + 1) = 0$

$\sin x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 + k \cdot \pi$

$-2\cos x + 1 = 0 \;\rightarrow\; \cos x = \dfrac{1}{2}$ $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x = \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi k \end{cases}$; amb $k \in z$

QÜESTIONS TEÒRIQUES

75. Saps que $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.

A partir d'aquesta expressió, justifica la validesa d'aquesta altra:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Si anomenem $h = x - x_0$, tenim que:

- Si $h \rightarrow 0$, aleshores $x \rightarrow x_0$.
- A més, $x_0 + h = x$

Per tant: $\displaystyle f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

76. Relaciona els límits següents amb la derivada de les funcions que hi apareixen:

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\phi(2 + x) - \phi(2)}{x}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\phi(2 + x) - \phi(2)}{x} = \phi'(2)$$

77. Una funció polinòmica de tercer grau, quants punts de derivada nul·la pot tenir? És possible que no en tingui cap? És possible que només en tingui un?

La derivada d'una funció polinòmica de tercer grau és una funció polinòmica de segon grau.

Així doncs, pot haver-hi dos punts, un punt o cap punt amb derivada nul·la.

Per exemple:

$f(x) = x^3 - 3x \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ Dos punts

$f(x) = x^3 \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow$ Un punt

$f(x) = x^3 + 3x \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 + 3 \neq 0$ per a tot $x \;\rightarrow$ Cap punt

78. Justifica que una funció polinòmica de segon grau té sempre un punt de tangent horitzontal.

La seva derivada és una funció polinòmica de primer grau, que s'anul·la sempre en un punt.

79. Hi pot haver dues funcions que tinguin la mateixa derivada? Posa exemples de funcions la derivada de les quals sigui $f'(x) = 2x$.

Sí. Per exemple, si $f'(x) = 2x$, podem considerar: $f(x) = x^2 + k$, sent k una constant qualsevol.

80. Donades $f(x) = (x + 1)^2$ i $g(x) = 3x$, calcula:

a) $f'(3x)$ **b)** $(f \circ g)'(x)$

c) $g'[f(x)]$ **d)** $(g \circ f)'(x)$

$f'(x) = 2(x + 1) = 2x + 2$; $g'(x) = 3$

a) $f'(3x) = 2 \cdot 3x + 2 = 6x + 2$

b) $(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = (2 \cdot 3x + 2) \cdot 3 = 18x + 6$

c) $g'[f(x)] = 3$

d) $(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) = 3(2x + 2) = 6x + 6$

81. **La funció $y = \sqrt{x^2 - 4x}$, té algun punt de derivada nul·la?**

I la funció $y = \sqrt{4x - x^2}$?

$$y = \sqrt{x^2 - 4x} \quad \to \quad \mathit{Domini} = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$$

$$y' = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x}} = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x}} = 0 \quad \to \quad x = 2$$

Però $x = 2$ no pertany al domini de definició de la funció. Per tant, no té cap punt de derivada nul·la.

Per a l'altra funció:

$$y = \sqrt{4x - x^2} \quad \to \quad \mathit{Domini} = [0, 4]$$

$$y' = \frac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2}} = \frac{2 - x}{\sqrt{4x - x^2}} = 0 \quad \to \quad x = 2 \text{ (Sí pertany al domini)}$$

La derivada s'anul·la en $x = 2$.

82. **Siguin f i g dues funcions derivables en $\mathbb{R}$, de manera que:**

$f(0) = 5$; $f'(0) = 6$; $f'(1) = 3$

$g(0) = 1$; $g'(0) = 4$, i $g'(5) = 2$

Prova que $f \circ g$ i $g \circ f$ tenen la mateixa derivada en $x = 0$.

Apliquem la regla de la cadena:

$$(f \circ g)'(0) = f'\big(g(0)\big) \cdot g'(0) = f'(1) \cdot g'(0) = 3 \cdot 4 = 12$$

$$(g \circ f)'(0) = g'\big(f(0)\big) \cdot f'(0) = g'(5) \cdot f'(0) = 2 \cdot 6 = 12$$

Pàgina 257

PER APROFUNDIR

83. **Demostra que totes les derivades d'ordre parell de la funció $f(x) = \sin 2x$ s'anul·len en l'origen de les coordenades.**

$$f^{\mathrm{I}}(x) = 2\cos 2x$$

$$f^{\mathrm{II}}(x) = -4\sin 2x = -2^2 \cdot \sin 2x$$

$$f^{\mathrm{III}}(x) = -8\cos 2x = -2^3 \cdot \cos 2x$$

$$f^{\mathrm{IV}}(x) = 16\sin 2x = 2^4 \cdot \sin 2x$$

…

En general, les derivades d'ordre parell són de la forma: $f^{(n)}(x) = k \cdot \sin 2x$, en què k és constant.

Així doncs, s'anul·len totes en $x = 0$, atès que $\sin 0 = 0$. Com que $f(0) = 0$, tenim que totes les derivades d'ordre parell de $f(x)$ s'anul·len en l'origen de coordenades.

84. **Donada $y = \sin x$, troba un punt en l'interval $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ en el qual la tangent sigui paral·lela a la corda que passa per (0, 0) i $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.**

La corda que passa per (0, 0) i $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ té pendent: $m = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$.

Hem de trobar un punt de l'interval $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ en el qual la derivada de la funció sigui igual a $\frac{2}{\pi}$:

$$\left.\begin{array}{l} y' = \cos x = \dfrac{2}{\pi} \\ x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \end{array}\right\} \rightarrow \ x = 0{,}88$$

85. **Prova, utilitzant la definició de derivada, que la funció:**

$$f(x) = (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$$

és derivable en $x = 1$ i que no ho és en $x = -1$.

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h\sqrt{1 - (1 + h)^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(-\sqrt{1 - (1 + h)^2}\right) = 0 = f'(1)$$

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1 + h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2 - h)\sqrt{2h - h^2} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left((2 - h)\sqrt{\frac{2h - h^2}{h^2}}\right) = \lim_{h \to 0} (2 - h)\sqrt{\frac{(2 - h)}{h}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{0} \rightarrow \text{ no existeix } f'(-1)$$

86. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} + 2 & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Hi ha algun valor de k per al qual $f(x)$ sigui contínua en $x = 0$?

Continuïtat: Ha de complir-se que $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x} + 2\right) = 1 + 2 = 3 \\ f(0) = k \end{array}\right\}$$

La funció serà contínua en $x = 0$ si $k = 3$.

87. **Troba la derivada n-èsima de les funcions següents:**

a) $y = e^{ax}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x}$ **c)** $y = ln(1 + x)$

a) $y' = a\, e^{ax};\ y'' = a^2\, e^{ax};\ y''' = a^3\, e^{ax};\ \ldots\ y^{(n)} = a^n\, e^{ax}$

Ho demostrem per inducció: (per a $n = 1, 2, 3$ es compleix).

Si $y^{(n-1)} = a^{n-1}\, e^{ax}$, derivant obtenim: $y^{(n)} = a \cdot a^{n-1}\, e^{ax} = a^n\, e^{ax}$, tal com volíem demostrar.

b) $y' = \dfrac{-1}{x^2};\ y'' = \dfrac{2}{x^3};\ y''' = \dfrac{-6}{x^4};\ \ldots\ y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}}$

Ho demostrem per inducció: (per a $n = 1, 2, 3$ es compleix).

Si $y^{(n-1)} = \dfrac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{x^n}$, derivant obtenim:

$y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!\,(-1) \cdot n}{x^{n+1}} = \dfrac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}}$, tal com volíem demostrar.

c) $y' = \dfrac{1}{1+x};\ y'' = \dfrac{-1}{(1+x)^2};\ y''' = \dfrac{2}{(1+x)^3};\ \ldots\ y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{(1+x)^n}$

Ho demostrem per inducció: (per a $n = 1, 2, 3$ es compleix).

Si $y^{(n-1)} = \dfrac{(-1)^{n-2}\,(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}$, derivant, obtenim:

$y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-2} \cdot (n-2)!\,(-1)(n-1)}{(1+x)^n} = \dfrac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{(1+x)^n}$, tal com volíem demostrar.

88. **Considera la funció:** $f(x) = \begin{cases} x^n \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ **essent n un nombre natural.**

a) Demostra que f és derivable en $x = 0$ per a $n = 2$.

b) Demostra que f no és derivable en $x = 0$ per a $n = 1$.

a) $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 \sin(1/h) - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} h \sin\left(\dfrac{1}{h}\right) \overset{(*)}{=} 0$

(*) Tenim en compte que $-1 \leq \sin\left(\dfrac{1}{h}\right) \leq 1$.

Per tant, f és derivable en $x = 0$ per a $n = 2$.

b) $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \, sin\,(1/h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} sin\left(\frac{1}{h}\right)$

Aquest límit no existeix (el valor de $sin\left(\frac{1}{h}\right)$ va oscil·lant entre –1 i 1).

Així doncs, f no és derivable en $x = 0$ per a $n = 1$.

89. **Prova que existeix un punt de la corba: $f(x) = e^x + arc\ tg\ x$ la tangent del qual (en aquest punt) és paral·lela a la recta $y = 3x + 2$.**

☛ ***Aplica el teorema de Bolzano a la funció $f'(x) - 3$.***

El pendent de la recta $y = 3x + 2$ és $m = 3$.

Hem de provar que existeix un punt de la corba $f(x)$ de manera que $f'(x) = 3$.

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{1 + x^2} = 3$$

Considerem la funció $G(x) = f'(x) - 3$; és a dir:

$$G(x) = e^x + \frac{1}{1 + x^2} - 3$$

Tenim que: $\begin{cases} G(0) = -1 < 0 \\ G(1) = e - \frac{5}{2} \approx 0{,}22 > 0 \\ G(x) \text{ és una funció contínua en } [0, 1] \end{cases}$

Aplicant el teorema de Bolzano, sabem que existeix un punt $c \in (0, 1)$ de manera que $G(c) = 0$. És a dir, $f'(c) - 3 = 0$; o bé $f'(c) = 3$, tal com volíem provar.

90. **Comprova en cada cas que $f(x)$ verifica l'equació indicada:**

a) $f(x) = e^x \, sin\, x$

$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$

b) $f(x) = ln \frac{1}{x + 1}$

$x f'(x) + 1 = e^{f(x)}$

a) $f'(x) = e^x \, sin\, x + e^x \cos x$

$f''(x) = \cancel{e^x \, sin\, x} + e^x \cos x + e^x \cos x - \cancel{e^x \, sin\, x} = 2e^x \cos x$

$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 2e^x \cos x - 2e^x \, sin\, x - 2e^x \cos x + 2e^x \, sin\, x = 0$

Per tant: $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$

D'una altra manera:

$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = f(x) + e^x \cos x$

$f''(x) = f'(x) + e^x \cos x - e^x \sin x =$

$= f'(x) + e^x \cos x - e^x \sin x + e^x \sin x - e^x \sin x =$

$= f'(x) + (e^x \sin x + e^x \cos x) - 2(e^x \sin x) =$

$= f'(x) + f'(x) - 2f(x) = 2f'(x) - 2f(x)$

Així doncs: $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$

b) $f(x) = \ln 1 - \ln(x + 1) = -\ln(x + 1)$

$f'(x) = \dfrac{-1}{x+1}$

$xf'(x) + 1 = \dfrac{-x}{x+1} + 1 = \dfrac{-x + x + 1}{x+1} = \dfrac{1}{x+1} = e^{\ln\left(\frac{1}{x+1}\right)} = e^{f(x)}$

Així doncs: $xf'(x) + 1 = e^{f(x)}$

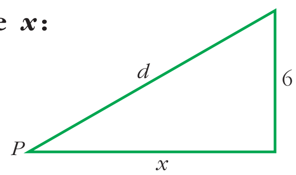
PER PENSAR UNA MICA MÉS

91. Un avió vola horitzontalment a 6 km d'altura. La ruta de l'avió passa per la vertical d'un punt P i se sap que, en l'instant en què la distància de l'avió a P és 10 km, aquesta distància augmenta a raó de 6 km/minut.

Troba la velocitat de l'avió, que suposarem constant.

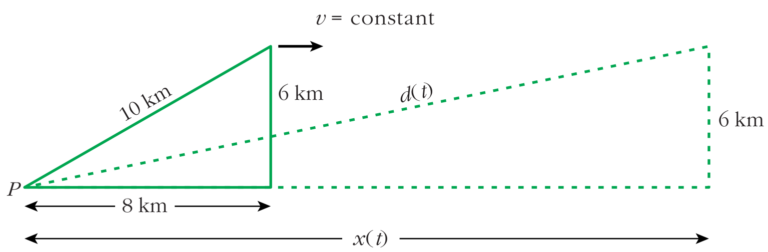
Passos:

a) Expressa d en funció de x:



b) Obtén l'expressió de la velocitat d'allunyament de P, $d'(t)$, en funció de x i de $x'(t)$.

c) Aïlla $x'(t_0)$ si t_0 és l'instant a què es refereix l'enunciat i, per tant, per al qual coneixem algunes dades numèriques. $x'(t_0)$ és la velocitat de l'avió en aquest instant i, per tant, la seva velocitat constant.



a) $d = \sqrt{x^2 + 36}$

b) $d(t) = \sqrt{(x(t))^2 + 36}$

$$d'(t) = \frac{2x(t)\; x'(t)}{2\sqrt{(x(t))^2 + 36}} = \frac{x(t) \cdot x'(t)}{\sqrt{(x(t))^2 + 36}}$$

c) $x'(t_0) = \dfrac{d'(t_0)\sqrt{(x(t_0))^2 + 36}}{x(t_0)} = \dfrac{6\sqrt{8^2 + 36}}{8} = \dfrac{60}{8} = 7{,}5$ km/min

L'avió va a 7,5 km/min; és a dir, a 450 km/h.