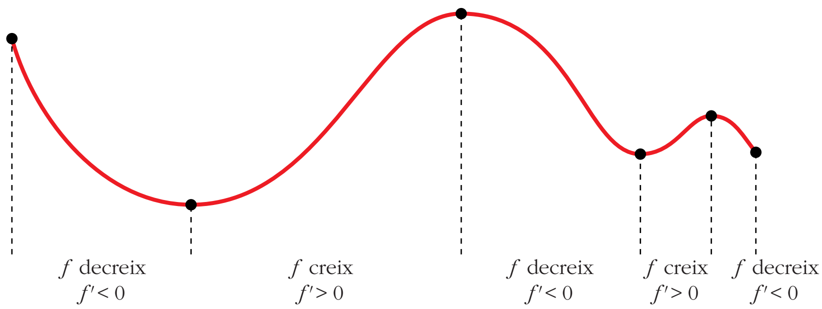
UNITAT 10 APLICACIONS DE LES DERIVADES

Pàgina 258

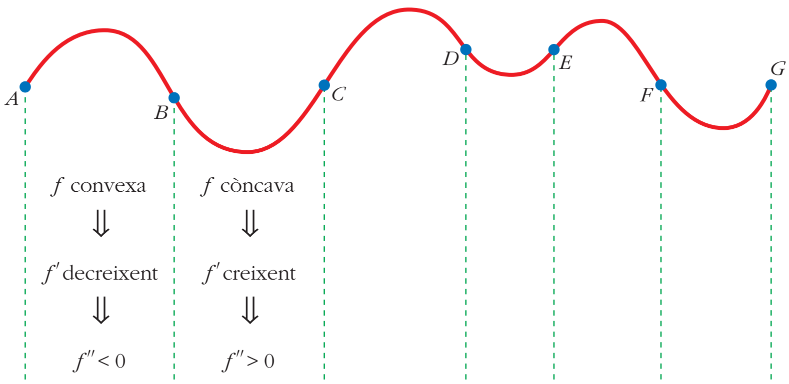
Relació del creixement amb el signe de la primera derivada

■ **Analitza la corba següent:**



Relació de la curvatura amb el signe de la segona derivada

■ **Analitza la concavitat i la convexitat de la corba següent:**



$CD \rightarrow f$ convexa $\rightarrow f'$ decreixent $\rightarrow f'' < 0$

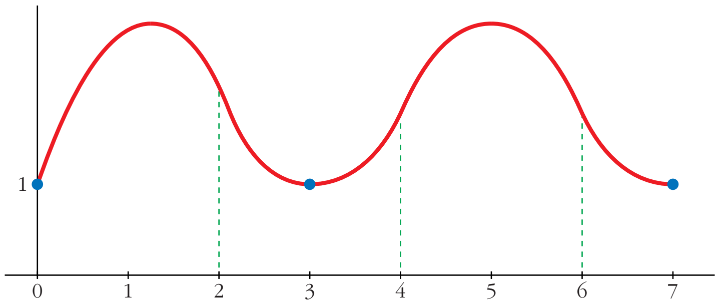
$DE \rightarrow f$ còncava $\rightarrow f'$ creixent $\rightarrow f'' > 0$

$EF \rightarrow f$ convexa $\rightarrow f'$ decreixent $\rightarrow f'' < 0$

$FG \rightarrow f$ còncava $\rightarrow f'$ creixent $\rightarrow f'' > 0$

■ **Dibuixa la gràfica d'una funció, f, que compleixi les condicions següents:**

- **La funció està definida en [0, 7].**
- **Només pren valors positius.**
- **Passa pels punts (0, 1), (3, 1) i (7, 1).**
- **En l'interval (1, 2), la funció és convexa.**
- **En l'interval (2, 4), $f'' > 0$.**
- **En l'interval (4, 6), f' és decreixent.**
- **En l'interval (6, 7), f és còncava.**



Pàgina 260

1. Troba les rectes tangents a la corba:

$$y = \frac{5x^3 + 7x^2 - 16x}{x - 2}$$

en els punts d'abscisses 0, 1, 3.

Calculem la derivada de la funció:

$$y' = \frac{(15x^2 + 14x - 16)(x - 2) - (5x^3 + 7x^2 - 16x)}{(x - 2)^2} = \frac{10x^3 - 23x^2 - 28x + 32}{(x - 2)^2}$$

Ordenades dels punts:

$$y(0) = 0; \quad y(1) = 4; \quad y(3) = 150$$

- **Recta tangent en (0, 0):** $y'(0) = 8$

  $y = 8x$

- **Recta tangent en (1, 4):** $y'(1) = -9$

  $y = 4 - 9(x - 1) = -9x + 13$

- **Recta tangent en (3, 150):** $y'(3) = 11$

  $y = 150 + 11(x - 3) = 11x + 117$

2. **Troba les rectes tangents a la circumferència:**

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 24 = 0$$

en els punts d'abscissa $x_0 = 3$.

Obtenció de les ordenades corresponents:

$$3^2 + y^2 - 2 \cdot 3 + 4y - 24 = 0$$

$$9 + y^2 - 6 + 4y - 24 = 0$$

$$y^2 + 4y - 21 = 0$$

$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 84}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-4 \pm 10}{2} \left\langle \begin{array}{l} y = 3 \rightarrow \text{Punt } (3, 3) \\ y = -7 \rightarrow \text{Punt } (3, -7) \end{array} \right.$$

Per trobar el pendent en aquests punts, derivem implícitament:

$$2x + 2yy' - 2 + 4y' = 0$$

$$y'(2y + 4) = 2 - 2x$$

$$y' = \frac{2 - 2x}{2y + 4} = \frac{1 - x}{y + 2}$$

Així: $y'(3, 3) = -\frac{2}{5}$; $y'(3, -7) = \frac{2}{5}$

- **Recta tangent en (3, 3):** $y = 3 - \frac{2}{5}(x - 3) = -\frac{2}{5}x + \frac{21}{5}$
- **Recta tangent en (3, –7):** $y = -7 + \frac{2}{5}(x - 3) = \frac{2}{5}x - \frac{41}{5}$

Pàgina 261

3. **Donada la funció $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$, esbrina:**

a) On creix. **b) On decreix.**

$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1)$

a) $x < -1 \rightarrow y' > 0 \rightarrow f$ és creixent en $(-\infty, -1)$

$x > 3 \rightarrow y' > 0 \rightarrow f$ és creixent en $(3, +\infty)$

b) $-1 < x < 3 \rightarrow y' < 0 \rightarrow f$ és decreixent en $(-1, 3)$

Pàgina 263

4. **Comprova que la funció $y = x^3/(x - 2)^2$ té només dos punts singulars, en $x = 0$ i en $x = 6$.**

Descobreix de quin tipus és cada un d'aquests estudiant-ne el signe de la derivada.

$$y' = \frac{3x^2(x-2)^2 - 2(x-2)x^3}{(x-2)^4} = \frac{x^2(x-2)(3(x-2)-2x)}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{x^2(3x-6-2x)}{(x-2)^3} = \frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3}$$

$$y' = 0 \;\rightarrow\; x^2(x-6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} f'(-0{,}01) > 0 \\ f'(0{,}01) > 0 \end{array}\right\}$ En $x = 0$ hi ha un punt d'inflexió.

$\left.\begin{array}{l} f'(5{,}99) < 0 \\ f'(6{,}01) > 0 \end{array}\right\}$ En $x = 6$ hi ha un mínim relatiu.

5. a) Troba tots els punts singulars (abscissa i ordenada) de la funció $y = -3x^4 + 4x^3$. Mitjançant una representació adequada, descobreix de quin tipus és cada un d'aquests.

b) Ídem per a $y = x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9$.

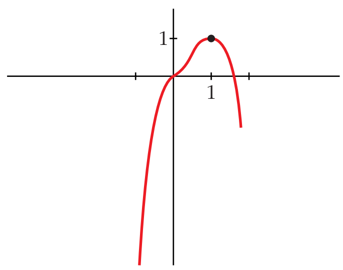
a) $y' = -12x^3 + 12x^2 = 12x^2(-x+1)$

$$y' = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punt } (0, 0) \\ x = 1 \;\rightarrow\; \text{Punt } (1, 1) \end{cases} \Bigg\} \text{ Dos punts singulars.}$$

Els dos punts són en l'interval $[-1; 1{,}5]$, on la funció és derivable.

A més, $f(-1) = -7$ i $f(1{,}5) = -1{,}7$.

- En $(0, 0)$ hi ha un *punt d'inflexió*.
- En $(1, 1)$ hi ha un *màxim relatiu*.



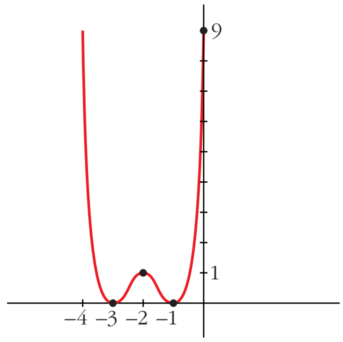
b) $y' = 4x^3 + 24x^2 + 44x + 24 = 4(x+1)(x+2)(x+3)$

$$y' = 0 \begin{cases} x = -1 \;\rightarrow\; \text{Punt } (-1, 0) \\ x = -2 \;\rightarrow\; \text{Punt } (-2, 1) \\ x = -3 \;\rightarrow\; \text{Punt } (-3, 0) \end{cases} \Bigg\} \text{ Tres punts singulars.}$$

Els tres punts són en el mateix interval $[-4, 0]$, on la funció és derivable.

A més, $f(-4) = f(0) = 9$.

- Hi ha un *mínim relatiu* en $(-3, 0)$, un *màxim relatiu* en $(-2, 1)$ i un *mínim relatiu* en $(-1, 0)$.



Pàgina 265

6. **Estudia la curvatura de la funció: $y = 3x^4 - 8x^3 + 5$**

$f'(x) = 12x^3 - 24x^2; \quad f''(x) = 36x^2 - 48x$

$$f''(x) = 0 \quad \to \quad 12x(3x-4) = 0 \begin{cases} x = 0 \quad \to \quad \text{Punt } (0, 5) \\ x = \dfrac{4}{3} \quad \to \quad \text{Punt } \left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{121}{27}\right) \end{cases}$$

$$\left(f'''(x) = 72x - 48; \; f'''(0) \neq 0; \; f'''\left(\frac{4}{3}\right) \neq 0\right)$$

Els punts $(0, 5)$ i $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{121}{27}\right)$ són punts d'inflexió.

- La funció és còncava en $(-\infty, 0) \cup \left(\dfrac{4}{3}, +\infty\right)$, ja que $f''(x) > 0$.
- La funció és convexa en l'interval $\left(0, \dfrac{4}{3}\right)$, ja que $f''(x) < 0$.

7. **Estudia la curvatura de la funció: $y = x^3 - 6x^2 + 9x$**

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9; \quad f''(x) = 6x - 12$

$$f''(x) = 0 \quad \to \quad 6x - 12 = 0 \quad \to \quad x = 2 \quad \to \quad \text{Punt } (2, 2)$$

$$\left(f'''(x) = 6; \; f'''(2) \neq 0\right)$$

El punt $(2, 2)$ és un punt d'inflexió.

- La funció és convexa en $(-\infty, 2)$, ja que $f''(x) < 0$.
- La funció és còncava en $(2, +\infty)$, ja que $f''(x) > 0$.

Pàgina 267

8. **Troba el nombre positiu la suma del qual amb vint-i-cinc vegades el seu invers sigui mínima.**

Anomenem x el nombre que busquem. Ha de ser $x > 0$. Hem de minimitzar la funció:

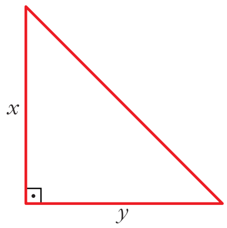
$$f(x) = x + \frac{25}{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2 - 25}{x^2} = 0 \begin{cases} x = 5 \quad \to \quad f(5) = 10 \\ x = -5 \quad (\text{no val, ja que } x > 0) \end{cases}$$

(Com que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, i la funció és contínua en $(0, +\infty)$; hi ha un mínim en $x = 5$.)

Així doncs, el nombre buscat és $x = 5$. El mínim és 10.

9. **De tots els triangles rectangles els catets dels quals sumen 10 cm, troba les dimensions d'aquell que tingui l'àrea màxima.**



$x + y = 10 \quad \rightarrow \quad y = 10 - x$

$\text{Àrea} = \dfrac{x \cdot y}{2} = \dfrac{x \cdot (10 - x)}{2} = \dfrac{10x - x^2}{2}, \quad 0 < x < 10$

Hem de maximitzar la funció:

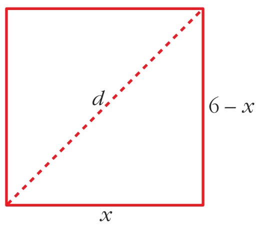
$$f(x) = \frac{10x - x^2}{2}, \quad 0 < x < 10$$

$$f'(x) = \frac{10 - 2x}{2} = 5 - x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 5 \quad \rightarrow \quad y = 10 - 5 = 5$$

$\left(f(0) = 0;\ f(10) = 0;\ f(5) = \dfrac{25}{2};\ \text{ i } f \text{ és contínua. Per tant, a } x = 5 \text{ hi ha el màxim} \right)$.

Els catets mesuren 5 cm cada un. L'àrea màxima és de 12,5 cm^2.

10. **Entre tots els rectangles de perímetre 12 m, quin és el que té la diagonal menor?**



$d = \sqrt{(6 - x)^2 + x^2}, \quad 0 < x < 6$

Hem de minimitzar la funció:

$f(x) = \sqrt{(6 - x)^2 + x^2}, \quad 0 < x < 6$

$$f'(x) = \frac{-2(6 - x) + 2x}{2\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}} = \frac{-12 + 4x}{2\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}} = \frac{-6 + 2x}{\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}}$$

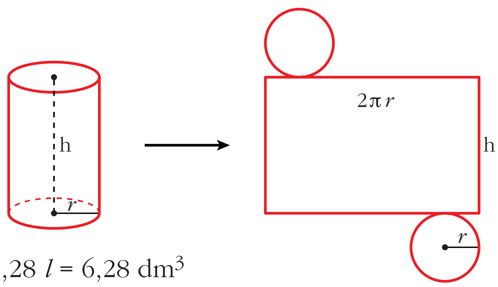
$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad -6 + 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 3$$

$(f(0) = 6;\ f(6) = 6;\ f(3) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \simeq 4{,}24;$ i $f(x)$ és contínua. Per tant, a $x = 3$ hi ha un mínim).

El rectangle amb la diagonal menor és el quadrat de costat 3 m.

11. **Determina les dimensions que ha de tenir un recipient cilíndric de volum igual a 6,28 litres perquè pugui construir-se amb la menor quantitat possible de llauna.**

Suposem el recipient amb dues tapes:



$\text{àrea total} = 2\pi r\text{h} + 2\pi r^2 = 2\pi r(\text{h} + r)$

$V = 6{,}28\ l = 6{,}28\ \text{dm}^3$

Com que $V = \pi \cdot r^2 \cdot \text{h} = 3{,}14 \cdot r^2 \cdot \text{h} = 6{,}28 \;\rightarrow\; \text{h} = \dfrac{6{,}28}{3{,}14 \cdot r^2} = \dfrac{2}{r^2} = \text{h}$

Així doncs: $\text{\textit{Àreal total}} = 2\pi r\left(\dfrac{2}{r^2} + r\right) = 2\pi\left(\dfrac{2}{r} + r^2\right)$

Hem de trobar el mínim de la funció:

$$f(r) = 2\pi\left(\frac{2}{r} + r^2\right), \quad r > 0$$

$$f'(r) = 2\pi\left(-\frac{2}{r^2} + 2r\right) = 2\pi\left(\frac{-2 + 2r^3}{r^2}\right) = 0 \;\rightarrow\; -2 + 2r^3 = 0 \;\rightarrow\; r = \sqrt[3]{1} = 1$$

(Com que $\lim\limits_{r \to 0^+} f(r) = +\infty$, $\lim\limits_{r \to +\infty} f(r) = +\infty$, i f és contínua en $(0, +\infty)$; a $r = 1$ hi ha un mínim.)

$$r = 1 \;\rightarrow\; \text{h} = \frac{2}{r^2} = \frac{2}{1} = 2$$

El cilindre tindrà un radi d'1 dm i una altura de 2 dm.

Pàgina 273

EXERCICIS I PROBLEMES PROPOSATS

PER PRACTICAR

Recta tangent

12. Troba l'equació de la recta tangent a les corbes següents en els punts que s'indiquen:

a) $y = \ln(\mathrm{tg}\ 2x)$ **en** $x = \dfrac{\pi}{8}$

b) $y = \sqrt{\sin 5x}$ **en** $x = \dfrac{\pi}{6}$

c) $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 15 = 0$ **en** $x = 2$

a) • Ordenada en el punt: $x = \dfrac{\pi}{8} \;\rightarrow\; y = 0$

• Pendent de la recta: $y' = \dfrac{2(1 + \mathrm{tg}^2\, 2x)}{\mathrm{tg}\, 2x} \;\rightarrow\; y'\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 4$

• Recta tangent: $y = 4\left(x - \dfrac{\pi}{8}\right) = 4x - \dfrac{\pi}{2}$

b) • Ordenada en el punt: $x = \dfrac{\pi}{6} \;\rightarrow\; y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

• Pendent de la recta:

$$y' = \frac{5\ cos\ 5x}{2\sqrt{sin\ 5x}} \quad \rightarrow \quad y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5(-\sqrt{3}/2)}{2\sqrt{2}/2} = \frac{-5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-5\sqrt{6}}{4}$$

• Recta tangent: $y = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{6}}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

c) • Ordenades en els punts:

$$4 + y^2 - 4 - 8y + 15 = 0 \quad \rightarrow \quad y^2 - 8y + 15 = 0$$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{4} = \frac{8 \pm 2}{2} \begin{cases} y = 5 \quad \rightarrow \quad \text{Punt } (2, 5) \\ y = 3 \quad \rightarrow \quad \text{Punt } (2, 3) \end{cases}$$

• Pendent de les rectes:

$$2x + 2yy' - 2 - 8y' = 0$$

$$y'(2y - 8) = 2 - 2x \quad \rightarrow \quad y' = \frac{2 - 2x}{2y - 8} = \frac{1 - x}{y - 4}$$

$$y'(2, 5) = \frac{1 - 2}{5 - 4} = -1$$

$$y'(2, 3) = \frac{1 - 2}{3 - 4} = 1$$

• Recta tangent en (2, 5): $y = 5 - 1 \cdot (x - 2) \quad \rightarrow \quad y = -x + 7$

• Recta tangent en (2, 3): $y = 3 + 1 \cdot (x - 2) \quad \rightarrow \quad y = x + 1$

13. Troba les tangents a la corba $y = \frac{2x}{x - 1}$ paral·leles a la recta $2x + y = 0$.

El pendent de la recta $2x + y = 0$ és $m = -2$.

Busquem els punts en els quals la derivada sigui igual a -2:

$$y' = \frac{2(x - 1) - 2x}{(x - 1)^2} = \frac{2x - 2 - 2x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{-2}{x^2 - 2x + 1}$$

$$y' = -2 \quad \rightarrow \quad \frac{-2}{x^2 - 2x + 1} = -2 \quad \rightarrow \quad -2 = -2(x^2 - 2x + 1)$$

$$x^2 - 2x + 1 \quad \rightarrow \quad x^2 - 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x(x - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Punt } (0, 0) \\ x = 2 \quad \rightarrow \quad \text{Punt } (2, 4) \end{cases}$$

Recta tangent en (0, 0): $y = -2x$

Recta tangent en (2, 4): $y = 4 - 2(x - 2) \quad \rightarrow \quad y = -2x + 8$

14. Escriu les equacions de les tangents en els punts que s'indiquen (si en algun cas no es pot, indica per què):

a) $y = Sh\ x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ **en 0 i** $ln\ 2$

b) $y = \sqrt{x + \sqrt{x+1}}$ **en** $x = 0$

c) $y = (x^2 + 1)^{sin\ x}$ **en** $x = 0$ **i** $x = \pi$

a) $y' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

- **En $x = 0$** $\rightarrow$ $f(0) = 0;\quad f'(0) = 1$

  $y = x$

- **En $x = ln\ 2$** $\rightarrow$ $f(ln\ 2) = \dfrac{3}{4};\quad f'(ln\ 2) = \dfrac{5}{4}$

  $y = \dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{4}(x - ln\ 2)$

b) $y' = \dfrac{1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x+1}}} = \dfrac{2\sqrt{x+1} + 1}{4\sqrt{x+1}\,\sqrt{x + \sqrt{x+1}}};\quad f'(0) = \dfrac{3}{4};\quad f(0) = 1$

$y = 1 + \dfrac{3}{4}x$

c) Trobem la derivada agafant logaritmes:

$$ln\ y = ln(x^2 + 1)^{sin\ x} \rightarrow ln\ y = sin\ x \cdot ln(x^2 + 1)$$

$$\frac{y'}{y} = cos\ x \cdot ln(x^2 + 1) + sin\ x \cdot \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$y' = (x^2 + 1)^{sin\ x}\left[cos\ x \cdot ln(x^2 + 1) + \frac{2x\ sin\ x}{x^2 + 1}\right]$$

- **En $x = 0$:** $\rightarrow$ $f(0) = 1;\quad f'(0) = 0 \rightarrow y = 1$

- **En $x = \pi$:** $\rightarrow$ $f(\pi) = 1;\quad f'(\pi) = -ln(\pi^2 + 1)$

  $y = 1 - ln(\pi^2 + 1) \cdot (x - \pi)$

15. Troba un punt de la gràfica $y = x^2 + x + 5$ en el qual la recta tangent sigui paral·lela a $y = 3x + 8$.

- El pendent de la recta $y = 3x + 8$ és $m = 3$.
- Busquem un punt en el qual la derivada valgui 3:

  $f'(x) = 2x + 1$

  $f'(x) = 3 \rightarrow 2x + 1 = 3 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = 7$

- El punt és $(1, 7)$.

16. **Troba una recta que sigui tangent a la corba:**

$$y = x^2 - 2x + 3$$

i que formi un angle de 45° amb l'eix d'abscisses. Hi ha algun punt de la corba en què la recta tangent sigui horitzontal?

- Si forma un angle de 45° amb l'eix d'abscisses, el pendent és $tg\ 45° = 1$.
- Busquem un punt en el qual la derivada valgui 1:

$$f'(x) = 2x - 2$$

$$f'(x) = 1 \rightarrow 2x - 2 = 1 \rightarrow x = \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{9}{4}$$

- La recta és: $y = \frac{9}{4} + \left(x - \frac{3}{2}\right) \rightarrow y = x + \frac{3}{4}$
- Vegem si hi ha algun punt de la corba en el qual la recta tangent sigui horitzontal; és a dir, en el qual la derivada valgui zero:

$$f'(x) = 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = 2 \rightarrow \text{Punt } (1, 2)$$

17. **Obtén l'equació de la recta tangent paral·lela a l'eix d'abscisses en les corbes següents:**

a) $y = x\ ln\ x$ **b)** $y = x^2 e^x$ **c)** $y = sin\ 2x$

Una recta paral·lela a l'eix d'abscisses té pendent zero.

a) $y' = ln\ x + x \cdot \frac{1}{x} = ln\ x + 1$

$$y' = 0 \rightarrow ln\ x + 1 = 0 \rightarrow ln\ x = -1 \rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e} \rightarrow y = \frac{-1}{e}$$

La recta tangent en el punt $\left(\frac{1}{e}, \frac{-1}{e}\right)$ és: $y = \frac{-1}{e}$

b) $y' = 2x\,e^x + x^2 e^x = (2x + x^2)e^x$. Com que $e^x \neq 0$ per a tot x:

$$y' = 0 \rightarrow 2x + x^2 = 0 \rightarrow x(2 + x) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{Punt } (0, 0) \\ x = -2 \rightarrow \text{Punt } (-2, 4/e^2) \end{cases}$$

- En el punt $(0, 0)$, la recta tangent és: $y = 0$
- En el punt $\left(-2, \frac{4}{e^2}\right)$, la recta tangent és: $y = \frac{4}{e^2}$

c) $y' = 2\ cos\ 2x$

$$y' = 0 \rightarrow 2\ cos\ 2x = 0 \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k \rightarrow y = 1 \\ 2x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + \pi k \rightarrow y = -1 \end{cases}$$

- En els punts $\left(\frac{\pi}{4} + \pi k,\ 1\right)$, amb $k \in \mathbb{Z}$, la recta tangent és: $y = 1$

- En els punts $\left(\frac{3\pi}{4} + \pi k,\ -1\right)$, amb $k \in \mathbb{Z}$, la recta tangent és: $y = -1$

18. **Troba l'equació de la recta tangent a la corba $x^y \cdot y^x = 1$ en el punt (1, 1).**

Per trobar la derivada agafem logaritmes:

$$x^y \cdot y^x = 1 \quad \rightarrow \quad y\, ln\, x + x\, ln\, y = ln\, 1 \quad \rightarrow \quad y\, ln\, x + x\, ln\, y = 0$$

Derivem:

$$y'\, ln\, x + y \cdot \frac{1}{x} + ln\, y + x \cdot \frac{y'}{y} = 0$$

$$y'\, xy\, ln\, x + y^2 + xy\, ln\, y + x^2\, y' = 0$$

$$y'(xy\, ln\, x + x^2) = -y^2 - xy\, ln\, y$$

$$y' = \frac{-y^2 - xy\, ln\, y}{xy\, ln\, x + x^2}$$

$$y'(1, 1) = -1$$

Així doncs, l'equació de la recta tangent en $(1, 1)$ és:

$$y = 1 - (x - 1); \text{ és a dir, } y = -x + 2$$

19. **Troba el punt de la gràfica de $y = 2\sqrt{x}$ en el qual la tangent formi un angle de 60° amb l'eix X. Escriu l'equació d'aquesta tangent.**

- Si forma un angle de 60° amb l'eix X, el pendent és $tg\, 60° = \sqrt{3}$.

- Busquem un punt en el qual la derivada valgui $\sqrt{3}$:

$$y' = \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y' = \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad 1 = 3x \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad y = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

El punt és $\left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

- La recta tangent en aquest punt serà:

$$y = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}\left(x - \frac{1}{3}\right) \quad \rightarrow \quad y = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}\,x - \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad y = \sqrt{3}\,x + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Màxims i mínims. Punts d'inflexió

20. Troba els màxims, mínims i punts d'inflexió de les funcions següents:

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ **b)** $y = \dfrac{x^3(3x-8)}{12}$ **c)** $y = x^4 - 2x^3$

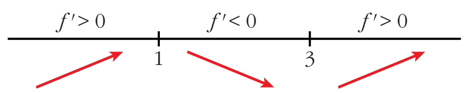
d) $y = x^4 + 2x^2$ **e)** $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ **f)** $y = e^x\,(x-1)$

a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 1 \;\rightarrow\; y = 4 \end{cases}$$

Signe de la derivada:



Hi ha un mínim en $(3, 0)$ i un màxim en $(1, 4)$.

Punts d'inflexió:

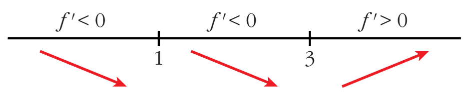
$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \;\rightarrow\; x = 2 \;\rightarrow\; y = 2$$

Com que $f''(x) < 0$ per a $x < 2$ i $f''(x) > 0$ per a $x > 2$, el punt $(2, 2)$ és un punt d'inflexió.

b) $y = \dfrac{3x^4 - 8x^3}{12}$

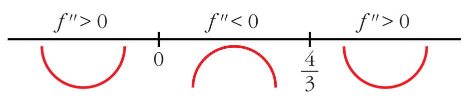
$$f'(x) = \frac{12x^3 - 24x^2}{12} = x^3 - 2x^2$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 2 \;\rightarrow\; y = -(4/3) \end{cases}$$



Hi ha un mínim en $\left(2, \dfrac{-4}{3}\right)$.

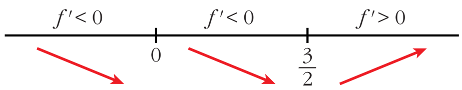
$$f''(x) = 3x^2 - 4x = 0 \;\rightarrow\; x(3x-4) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 4/3 \;\rightarrow\; y = -(64/81) \end{cases}$$



Hi ha un punt d'inflexió en $(0, 0)$ i un altre en $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{-64}{81}\right)$.

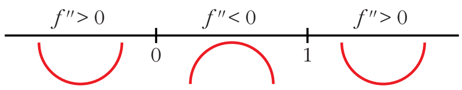
c) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(4x - 6) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = 3/2 \rightarrow y = -(27/16) \end{cases}$$



Hi ha un mínim en $\left(\frac{3}{2}, \frac{-27}{16}\right)$.

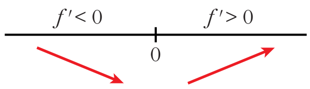
$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = 1 \rightarrow y = -1 \end{cases}$$



Hi ha un punt d'inflexió en $(0, 0)$ i un altre en $(1, -1)$.

d) $f'(x) = 4x^3 - 4x$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 4x(x^2 + 1) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0$$



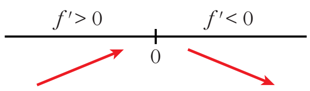
Hi ha un mínim en $(0, 0)$.

$f''(x) = 12x^2 + 4 \neq 0$ per a tot x.

No hi ha punts d'inflexió.

e) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$

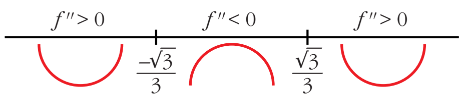
$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 1$$



Hi ha un màxim en $(0, 1)$.

$$f''(x) = \frac{-2(x^2 + 1)^2 + 2x \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} = \frac{-2(x^2 + 1) + 8x^2}{(x^2 + 1)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3}$$

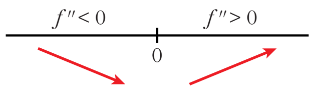
$$f''(x) = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow y = \frac{3}{4}$$



Hi ha un punt d'inflexió en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$ i un altre en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$.

f) $f'(x) = e^x(x-1) + e^x = e^x(x-1+1) = xe^x$

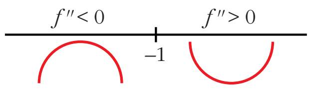
$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; xe^x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$ (ja que $e^x \neq 0$ per a tot x) $\rightarrow\; y = -1$



Hi ha un mínim en $(0, -1)$.

$f''(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = -1 \;\rightarrow\; y = \frac{-2}{e}$



Hi ha un punt d'inflexió en $\left(-1, \frac{-2}{e}\right)$.

21. **Estudia els intervals de creixement i decreixement de les funcions següents i digues si tenen màxim o mínims:**

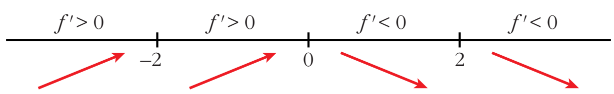
a) $y = \frac{1}{x^2-4}$ **b)** $y = \frac{2x-3}{x+1}$ **c)** $y = \frac{x^2}{x^2+1}$

d) $y = \frac{x^2-1}{x}$ **e)** $y = \frac{x^2-12}{x^2+4}$ **f)** $y = \frac{x^2(1-x)}{x^2-1}$

a) $y = \frac{1}{x^2-4}$. *Domini* $= \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-4)^2} = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signe de la derivada:



La funció: creix en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$

decreix en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

té un màxim en $\left(0, \frac{-1}{4}\right)$

b) $y = \dfrac{2x - 3}{x + 1}$. *Domini* = $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{2(x + 1) - (2x - 3)}{(x + 1)^2} = \frac{2x + 2 - 2x + 3}{(x + 1)^2} = \frac{5}{(x + 1)^2}$$

$f'(x) > 0$ per a tot $x \neq -1$.

Per tant, la funció és creixent en $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

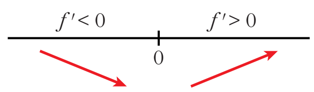
No té màxims ni mínims.

c) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$. *Domini* = $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x \cdot x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$

Signe de la derivada:



La funció: decreix en $(-\infty, 0)$

creix en $(0, +\infty)$

té un mínim en $(0, 0)$

d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$. *Domini* = $\mathbb{R} - \{0\}$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 - 1)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

$f'(x) > 0$ per a tot $x \neq 0$.

La funció és creixent en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

No té màxims ni mínims.

e) $y' = \dfrac{32x}{(x^2 + 4)^2}$.

y creixerà si $y' > 0$.

el denominador de y' és > 0 ja que és el quadrat d'un polinomi.

ens cal saber quan el numerador és > 0.

$32x > 0 \rightarrow x > 0$.

y creixerà en l'interval $(0, +\infty)$

y decreixerà en l'interval $(-\infty, 0)$

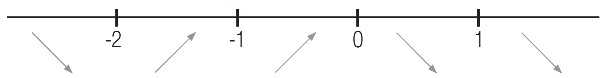
En $x = 0$ la funció y tindrà un mínim.

f) $y' = \dfrac{-x^2 - 2x}{(x^2 - 1)^2}$.

el denominador sempre serà positiu

y creixerà si $y' > 0 \;\rightarrow\; -x^2 - 2x > 0 \;\rightarrow\; -x^2 - 2x = 0 \;\rightarrow\; \begin{matrix} x = 0 \\ x = -2 \end{matrix}$

$x = \pm 1$ no són del domini



y creixerà si $x \in (-2, -1) \cup (-1, 0)$

y decreixerà si $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$

La funció y té un mínim en $(-2, 4)$ i un màxim en $(0, 0)$.

22. Troba els intervals de creixement i els màxims i mínims de les funcions següents:

a) $y = \dfrac{8 - 3x}{x(x-2)}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

d) $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{2 - x}$ **e)** $y = x^3 - 3x^2 - 9x$ **f)** $y = \dfrac{8}{x^2(x-3)}$

a) $y = \dfrac{8 - 3x}{x(x-2)} = \dfrac{8 - 3x}{x^2 - 2x}$. *Domini* $= \mathbb{R} - \{0, 2\}$

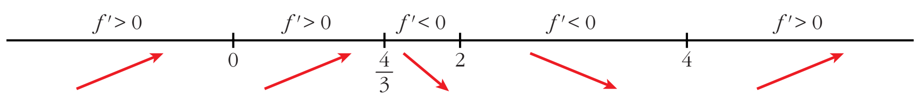
$$f'(x) = \frac{-3(x^2 - 2x) - (8 - 3x)\cdot(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{-3x^2 + 6x - 16x + 16 + 6x^2 - 6x}{(x^2 - 2x)^2} =$$

$$= \frac{-3x^2 - 16x + 16}{(x^2 - 2x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 - 16x + 16 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 192}}{6} = \frac{16 \pm \sqrt{64}}{6} =$$

$$= \frac{16 \pm 8}{6} \begin{cases} x = 4 \\ x = 4/3 \end{cases}$$

Signe de la derivada:



La funció: és creixent en $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{4}{3}\right) \cup (4, +\infty)$

és decreixent en $\left(\frac{4}{3}, 2\right) \cup (2, 4)$

té un màxim en $\left(\frac{4}{3}, -\frac{9}{2}\right)$

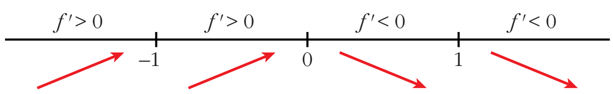
té un mínim en $\left(4, -\frac{1}{2}\right)$

b) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$. *Domini* $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - (x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -4x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signe de la derivada:



La funció: és creixent en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

és decreixent en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

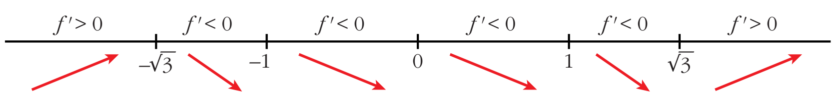
té un màxim en $(0, -1)$

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$. *Domini* $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(x^2-3) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

Signe de la derivada:



La funció: és creixent en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

és decreixent en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

té un màxim en $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

té un mínim en $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

té un punt d'inflexió en $(0, 0)$

d) $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{2 - x}$. *Domini* = $\mathbb{R} - \{2\}$

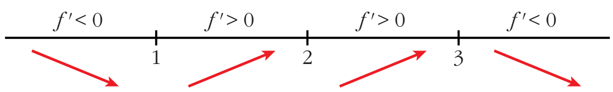
$$f'(x) = \frac{(4x - 3) \cdot (2 - x) - (2x^2 - 3x) \cdot (-1)}{(2 - x)^2} = \frac{8x - 4x^2 - 6 + 3x + 2x^2 - 3x}{(2 - x)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2 + 8x - 6}{(2 - x)^2} = \frac{-2(x^2 - 4x + 3)}{(2 - x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 4x + 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signe de la derivada:



La funció: és creixent en $(1, 2) \cup (2, 3)$

és decreixent en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

té un mínim en $(1, -1)$

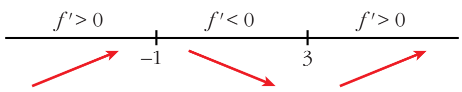
té un màxim en $(3, -9)$

e) $y = x^3 - 3x^2 - 9x$. *Domini* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Signe de la derivada:



La funció: és creixent en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

és decreixent en $(-1, 3)$

té un màxim en $(-1, 5)$

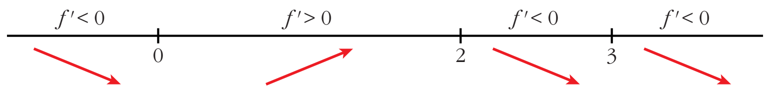
té un mínim en $(3, -27)$

f) $y = \dfrac{8}{x^2(x - 3)} = \dfrac{8}{x^3 - 3x^2}$. *Domini* = $\mathbb{R} - \{0, 3\}$

$$f'(x) = \frac{-8(3x^2 - 6x)}{x^4(x - 3)^2} = \frac{-8x(3x - 6)}{x^4(x - 3)^2} = \frac{-8(3x - 6)}{x^3(x - 3)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x - 6 = 0 \;\rightarrow\; x = 2$

Signe de la derivada:



La funció: és creixent en $(0, 2)$

és decreixent en $(-\infty, 0) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$

té un màxim en $(2, -2)$

23. **Estudia la concavitat, convexitat i punts d'inflexió de les funcions següents:**

a) $y = x^3 - 3x + 4$ **b)** $y = x^4 - 6x^2$ **c)** $y = (x - 2)^4$

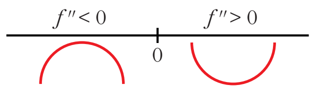
d) $y = x\,e^x$ **e)** $y = \dfrac{2 - x}{x + 1}$ **f)** $y = \ln(x + 1)$

a) $y = x^3 - 3x + 4$. *Domini* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 3$; $f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 6x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signe de $f''(x)$:



La funció: és convexa en $(-\infty, 0)$

és còncava en $(0, +\infty)$

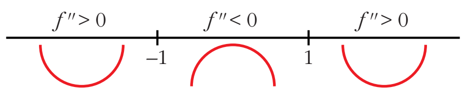
té un punt d'inflexió en $(0, 4)$

b) $y = x^4 - 6x^2$. *Domini* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3 - 12x$; $f''(x) = 12x^2 - 12$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 12(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Signe de $f''(x)$:



La funció: és còncava en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

és convexa en $(-1, 1)$

té un punt d'inflexió en $(-1, -5)$ i un altre en $(1, -5)$

c) $y = (x - 2)^4$. *Domini* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4(x - 2)^3$; $f''(x) = 12(x - 2)^2$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = 2$

$f''(x) > 0$ per a $x \neq 2$

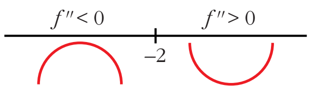
Per tant, la funció és còncava. No té punts d'inflexió.

d) $y = x\,e^x$. *Domini* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = e^x + x\,e^x = (1 + x)\,e^x$; $f''(x) = e^x + (1 + x)\,e^x = (2 + x)\,e^x$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = -2$ ($e^x \neq 0$ per a tot x)

Signe de $f''(x)$:



La funció: és convexa en $(-\infty, -2)$

és còncava en $(-2, +\infty)$

té un punt d'inflexió en $\left(-2, -\dfrac{2}{e^2}\right)$

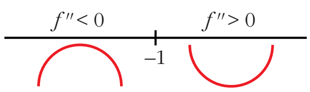
e) $y = \dfrac{2 - x}{x + 1}$. *Domini* = $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{-1(x + 1) - (2 - x)}{(x + 1)^2} = \frac{-x - 1 - 2 + x}{(x + 1)^2} = \frac{-3}{(x + 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6}{(x + 1)^3}$$

$f''(x) \neq 0$ per a tot x.

Signe de $f''(x)$:



La funció: és convexa en $(-\infty, -1)$

és còncava en $(-1, +\infty)$

no té punts d'inflexió

f) $y = \ln(x + 1)$. *Domini* = $(-1, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{x + 1}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(x + 1)^2}$$

$f''(x) < 0$ per a $x \in (-1, +\infty)$

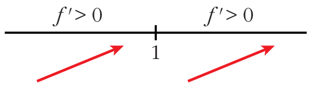
Per tant, la funció és convexa en $(-1, +\infty)$.

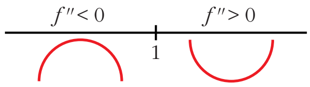
24. **Estudia si les funcions següents tenen màxims, mínims o punts d'inflexió en el punt d'abscissa $x = 1$:**

a) $y = 1 + (x - 1)^3$ **b)** $y = 2 + (x - 1)^4$

c) $y = 3 - (x - 1)^6$ **d)** $y = -3 + 2(x - 1)^5$

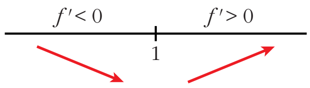
a) $f'(x) = 3(x-1)^2$; $f''(x) = 6(x-1)$

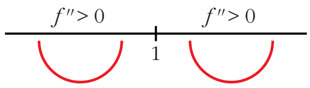




Hi ha un punt d'inflexió a $x = 1$.

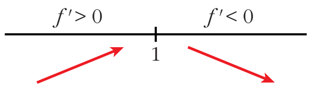
b) $f'(x) = 4(x-1)^3$; $f''(x) = 12(x-1)^2$

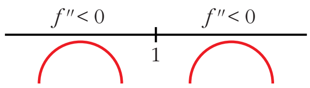




Hi ha un mínim a $x = 1$.

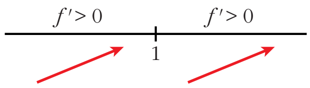
c) $f'(x) = -6(x-1)^5$; $f''(x) = -30(x-1)^4$

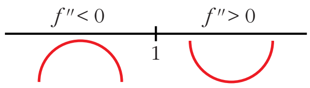




Hi ha un màxim a $x = 1$.

d) $f'(x) = 10(x-1)^4$; $f''(x) = 40(x-1)^3$





Hi ha un punt d'inflexió a $x = 1$.

Pàgina 274

PER RESOLDRE

25. **Escriu l'equació de la recta tangent a la corba $y = \dfrac{1}{x}$ en el punt $\left(3, \dfrac{1}{3}\right)$.**

Comprova que el segment d'aquesta recta comprès entre els eixos de coordenades està dividit en dues parts iguals pel punt de tangència.

$f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$; $f'(3) = \dfrac{-1}{9}$

- Equació de la recta tangent en $\left(3, \dfrac{1}{3}\right)$:

$$y = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x-3)$$

- Punts de tall de la recta tangent amb els eixos coordenats:

$x = 0 \rightarrow y = \dfrac{2}{3} \rightarrow$ Punt $\left(0, \dfrac{2}{3}\right)$

$y = 0 \rightarrow x = 6 \rightarrow$ Punt $(6, 0)$

$$\left.\begin{array}{l} dist\left[\left(3, \dfrac{1}{3}\right), \left(0, \dfrac{2}{3}\right)\right] = \quad (3-0)^2 + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{\sqrt{82}}{3} \\ \\ dist\left[\left(3, \dfrac{1}{3}\right), (6, 0)\right] = \quad (6-3)^2 + \left(0 - \dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{\sqrt{82}}{3} \end{array}\right\} \text{La distància és la mateixa.}$$

26. Donada la paràbola $y = 3x^2$, troba un punt en què la recta tangent a la corba en aquest punt sigui paral·lela a la corda que uneix els punts (0, 0) i (4, 48).

- La corda que uneix els punts (0, 0) i (4, 48) té pendent:

$$m = \frac{48}{4} = 12$$

- Busquem un punt de la funció $y = 3x^2$ en el qual la derivada valgui 12:

$$f'(x) = 6x$$

$$f'(x) = 12 \;\rightarrow\; 6x = 12 \;\rightarrow\; x = 2$$

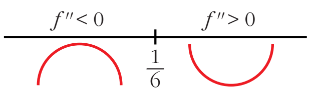
- El punt és (2, 12).

27. Troba l'equació de la recta tangent a la corba $y = 4x^3 - 2x^2 - 10$ en el seu punt d'inflexió.

- Trobem el seu punt d'inflexió:

$$f'(x) = 12x^2 - 4x; \quad f''(x) = 24x - 4$$

$$f''(x) = 24x - 4 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{1}{6}$$



Hi ha un punt d'inflexió en $\left(\dfrac{1}{6}, -\dfrac{271}{27}\right)$.

- Pendent de la recta tangent en aquest punt: $f'\left(\dfrac{1}{6}\right) = -\dfrac{1}{3}$

- Equació de la recta tangent:

$$y = -\frac{271}{27} - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{6}\right)$$

28. Estudia els intervals de creixement i els màxims i mínims de la funció donada per: $y = |x^2 + 2x - 3|$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{si } x < -3 \\ -x^2 - 2x + 3 & \text{si } -3 \le x \le 1 \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -3 \\ -2x - 2 & \text{si } -3 < x < 1 \\ 2x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En $x = -3$ no és derivable, ja que $f'(-3^-) = -4 \neq f'(-3^+) = 4$.

En $x = 1$ no és derivable, ja que $f'(1^-) = -4 \neq f'(1^+) = 4$.

- Vegem on s'anul·la la derivada:

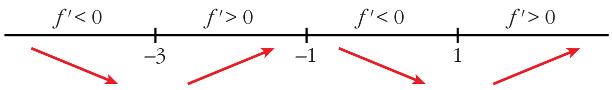
  $2x + 2 = 0 \;\to\; x = -1$

  Però $f'(x) = 2x + 2$ per a $x < -3$ i $x > 1$.

  $-2x - 2 = 0 \;\to\; x = -1$ i $f'(x) = -2x - 2$ per a $-3 < x < 1$

  Per tant, $f'(x)$ s'anul·la en $x = -1$.

- Signe de la derivada:



- La funció: és creixent en $(-3, -1) \cup (1, +\infty)$

  és decreixent en $(-\infty, -3) \cup (-1, 1)$

  té un màxim en $(-1, -4)$

  té un mínim en $(-3, 0)$ i un altre en $(1, 0)$.

29. Estudia l'existència de màxims i mínims relatius i absoluts de la funció $y = |x^2 - 4|$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

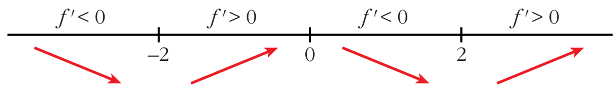
$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -2 \\ -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

En $x = -2$ no és derivable, ja que $f'(-2^-) = -4 \neq f'(-2^+) = 4$.

En $x = 2$ no és derivable, ja que $f'(2^-) = -4 \neq f'(2^+) = 4$.

- La derivada s'anul·la en $x = 0$.

• Signe de la derivada:



• La funció té un màxim relatiu en $(0, 4)$.

No té màxim absolut $\left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty\right)$.

• Té un mínim relatiu en $(-2, 0)$ i un altre en $(2, 0)$. En aquests punts, el mínim també és absolut, atès que $f(x) \geq 0$ per a tot x.

30. Troba el valor de c de manera que la funció $y = \dfrac{e^x}{x^2 + c}$ tingui un únic extrem relatiu.

Es tracta d'un màxim o d'un mínim?

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 + c) - e^x \cdot 2x}{(x^2 + c)^2} = \frac{e^x(x^2 + c - 2x)}{(x^2 + c)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 2x + c = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4c}}{2}$$

Perquè només hi hagi un extrem relatiu, ha de ser: $4 - 4c = 0 \;\rightarrow\; c = 1$

En aquest cas seria:

$$y = \frac{e^x}{x^2 + 1}; \quad f'(x) = \frac{e^x(x - 1)^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = 1$$

$$f'(x) > 0 \text{ si } x \neq 1 \;\rightarrow\; f(x) \text{ és creixent si } x \neq 1.$$

Hi ha un punt d'inflexió a $x = 1$.

31. Estudia el creixement de la funció:

$$\boldsymbol{f(x) = e^x (cos\ x + sin\ x)}$$

i determina els màxims i mínims de la funció per a $x \in [0, 2\pi]$.

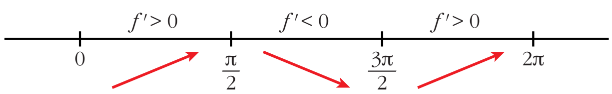
Considerem la funció: $f(x) = e^x(cos\, x + sin\, x)$ per a $x \in [0, 2\pi]$.

Calculem la derivada:

$$f'(x) = e^x(cos\, x + sin\, x) + e^x(-sin\, x + cos\, x) = e^x(2\, cos\, x) = 2e^x\, cos\, x$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; cos\, x = 0 \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} \\[2mm] x = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \quad (\text{per a } x \in [0, 2\pi])$$

Signe de la derivada:



La funció: és creixent en $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

és decreixent en $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

té un màxim en $\left(\dfrac{\pi}{2}, e^{\pi/2}\right)$

té un mínim en $\left(\dfrac{3\pi}{2}, -e^{3\pi/2}\right)$

32. **Donada la funció $y = ax^4 + 3bx^3 - 3x^2 - ax$, calcula els valors de a i b sabent que la funció té dos punts d'inflexió, un en $x = 1$ i un altre en $x = 1/2$.**

$$f'(x) = 4ax^3 + 9bx^2 - 6x - a$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 18bx - 6$$

$$\left.\begin{aligned} f''(1) = 0 &\;\rightarrow\; 12a + 18b - 6 = 0 \\ f''(1/2) = 0 &\;\rightarrow\; 3a + 9b - 6 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 2a + 3b - 1 = 0 \\ a + 3b - 2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Restant les igualtats: $a + 1 = 0 \;\rightarrow\; a = -1$

Substituint en la 2.ª equació: $3b - 3 = 0 \;\rightarrow\; b = 1$

33. **Sigui $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomi que compleix $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$ i té dos extrems relatius per a $x = 1$ i $x = 2$.**

a) Troba a, b, c i d.

b) Són màxims o mínims els extrems relatius?

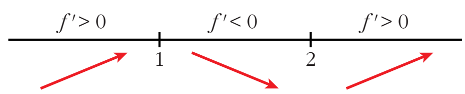
a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$\left.\begin{aligned} f(1) = 0 &\;\rightarrow\; a + b + c + d = 0 \\ f'(0) = 2 &\;\rightarrow\; c = 2 \\ f'(1) = 0 &\;\rightarrow\; 3a + 2b + c = 0 \\ f'(2) = 0 &\;\rightarrow\; 12a + 4b + c = 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} a + b + d &= -2 \\ c &= 2 \\ 3a + 2b &= -2 \\ 6a + 2b &= -1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} a &= \frac{1}{3} \\ b &= \frac{-3}{2} \\ c &= 2 \\ d &= \frac{-5}{6} \end{aligned}$$

Així: $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x - \dfrac{5}{6}$; $\quad f'(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 1) \cdot (x - 2)$

b) Signe de la derivada:



Hi ha un màxim per a $x = 1$ i un mínim per a $x = 2$.

34. **La corba $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ talla l'eix d'abscisses en $x = -1$ i té un punt d'inflexió en (2, 1). Calcula a, b i c.**

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f''(x) = 6x + 2a$$

$$\left.\begin{array}{lll} f(-1) = 0 & \rightarrow & -1 + a - b + c = 0 \\ f(2) = 1 & \rightarrow & 8 + 4a + 2b + c = 1 \\ f''(2) = 0 & \rightarrow & 12 + 2a = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a - b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = -7 \\ a = -6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -6 \\ b = \dfrac{10}{3} \\ c = \dfrac{31}{3} \end{array}$$

35. **De la funció $f(x) = ax^3 + bx$ sabem que passa per (1, 1) i en aquest punt té tangent paral·lela a la recta $3x + y = 0$.**

a) Troba a i b.

b) Determina'n els extrems relatius i els intervals de creixement i decreixement.

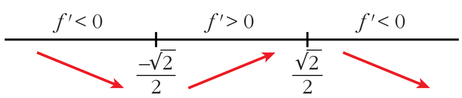
a) $f(x) = ax^3 + bx; \quad f'(x) = 3ax^2 + b$

$$\left.\begin{array}{lll} f(1) = 1 & \rightarrow & a + b = 1 \\ f'(1) = -3 & \rightarrow & 3a + b = -3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 3 \end{array}\right\} f(x) = -2x^3 + 3x$$

b) $f'(x) = -6x^2 + 3$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad -3(2x^2 - 1) = 0 \quad \begin{cases} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Signe de la derivada:



La funció: és decreixent en $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

és creixent en $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

té un mínim en $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$

té un màxim en $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$

36. **La funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verifica que $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ i que f no té extrem relatiu en $x = 1$. Calcula a, b i c.**

☛ ***Si és $f'(1) = 0$ i no hi ha extrem relatiu, ha d'haver-hi una inflexió en $x = 1$.***

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$$\left.\begin{array}{lll} f(1) = 1 & \rightarrow & 1 + a + b + c = 1 \\ f'(1) = 0 & \rightarrow & 3 + 2a + b = 0 \\ f''(1) = 0 & \rightarrow & 6 + 2a = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = -3 \\ b = 3 \\ c = 0 \end{array}\right\} f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$

37. **Sigui $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$. Troba a i b perquè la corba $y = f(x)$ tingui en $x = 1$ un punt d'inflexió amb tangent horitzontal.**

Si en $x = 1$ té un punt d'inflexió amb tangent horitzontal, ha de ser $f'(1) = f''(1) = 0$.

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$$\left.\begin{array}{lll} f'(1) = 0 & \rightarrow & 3 + 2a + b = 0 \\ f''(1) = 0 & \rightarrow & 6 + 2a = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = -3 \\ b = 3 \end{array}\right\} f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$$

38. **La corba $y = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ talla l'eix OX en $x = 1$ i té un punt d'inflexió en (3, 2). Calcula els punts de la corba que tinguin recta tangent paral·lela a l'eix OX.**

$f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$; $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + \beta$; $f''(x) = 6x + 2\alpha$

$$\left.\begin{array}{lll} f(1) = 0 & \rightarrow & 1 + \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ f(3) = 2 & \rightarrow & 27 + 9\alpha + 3\beta + \gamma = 2 \\ f''(3) = 0 & \rightarrow & 18 + 2\alpha = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \alpha = -9 \\ \beta = 24 \\ \gamma = -16 \end{array}$$

Així doncs: $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$; $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$

- Punts amb tangent horitzontal:

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 288}}{6} = \frac{18 \pm \sqrt{36}}{6} = \frac{18 \pm 6}{6} \begin{array}{l} x = 4 \\ x = 2 \end{array}$$

- Els punts són (4, 0) i (2, 4).

39. **Troba els punts de la corba $y = \frac{1}{4}x^2 + 4x - 4$**

en què la recta tangent a aquesta passi pel punt (0, –8). Escriu les equacions de les rectes tangents.

☛ **L'equació de la tangent és** $y = f(a) + f'(a)\,(x - a)$**, on** $f(a) = \frac{1}{4}a^2 + 4a - 4$ **i** $f'(a) = \frac{1}{2}a + 4$**.**

Substitueix en l'equació de la tangent i fes que aquesta passi per (0, –8).

L'equació de la tangent en $\big(a, f(a)\big)$ és $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Com que $f(a) = \frac{1}{4}a^2 + 4a - 4$ i $f'(a) = \frac{1}{2}a + 4$, queda:

$$y = \frac{1}{4}a^2 + 4a - 4 + \left(\frac{1}{2}a + 4\right)(x - a)$$

Si la recta tangent passa per $(0, -8)$:

$$-8 = \frac{1}{4}a^2 + 4a - 4 + \left(\frac{1}{2}a + 4\right)(-a)$$

$$-8 = \frac{1}{4}a^2 + \cancel{4a} - 4 - \frac{1}{2}a^2 - \cancel{4a}$$

$$-4 = -\frac{1}{4}a^2 \;\rightarrow\; -16 = -a^2 \;\rightarrow\; a^2 = 16 \begin{cases} a = -4 \\ a = 4 \end{cases}$$

- Hi ha dos punts: $(-4, -16)$ i $(4, 16)$
- Recta tangent en $(-4, -16)$: $f'(-4) = 2$

  $y = -16 + 2(x + 4) \;\rightarrow\; y = 2x - 8$
- Recta tangent en $(4, 16)$: $f'(4) = 6$

  $y = 16 + 6(x + 4) \;\rightarrow\; y = 6x - 8$

40. **Troba els punts de la corba** $y = 3x^2 - 5x + 12$ **en què la recta tangent a aquesta passi per l'origen de coordenades. Escriu les equacions d'aquestes tangents.**

$$y = 3x^2 - 5x + 12; \quad f'(x) = 6x - 5$$

- La recta tangent en un punt $\big(a, f(a)\big)$ és:

  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$; és a dir:

  $y = 3a^2 - 5a + 12 + (6a - 5) \cdot (x - a)$
- Perquè passi per l'origen de coordenades, ha de ser:

  $0 = 3a^2 - 5a + 12 + (6a - 5) \cdot (-a)$

  $0 = 3a^2 - \cancel{5}a + 12 - 6a^2 + \cancel{5}a$

  $3a^2 = 12 \;\rightarrow\; a^2 = 4 \begin{cases} a = -2 \\ a = 2 \end{cases}$
- Hi ha dos punts: $(-2, 34)$ i $(2, 14)$

• Recta tangent en $(-2, 34)$: $f'(-2) = -17$

$$y = 34 - 17(x + 2) \;\rightarrow\; y = -17x$$

• Recta tangent en $(2, 14)$: $f'(2) = 7$

$$y = 14 + 7(x - 2) \;\rightarrow\; y = 7x$$

41. **Donada la funció $f(x) = x^2 - 3x + 4$:**

a) Troba l'equació de la recta tangent a f en un punt qualsevol $x = a$.

b) Troba el valor o valors de a perquè aquesta recta passi pel punt $P(0, 0)$ (exterior a la corba).

a) $f(x) = x^2 - 3x + 4$; $f'(x) = 2x - 3$

La recta tangent en $x = a$ és:

$y = f(a) + f'(a)(x - a)$; és a dir

$y = a^2 - 3a + 4 + (2a - 3) \cdot (x - a)$

b) Perquè la recta passi per $(0, 0)$ serà:

$$0 = a^2 - 3a + 4 + (2a - 3) \cdot (-a)$$

$$0 = a^2 - \cancel{3a} + 4 - 2a^2 + \cancel{3a}$$

$$a^2 = 4 \left\langle \begin{array}{l} a = -2 \\ a = 2 \end{array} \right.$$

Pàgina 275

42. **Troba l'angle que formen les rectes tangents a les funcions $f(x)$ i $g(x)$ en el punt d'abscissa 2:**

$$f(x) = 2x - x^2 \qquad g(x) = x^2 - x - 2$$

☛ ***Recorda que l'angle de dues rectes es pot calcular així: tg $\alpha = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$, on m_1 i m_2 són els pendents de les rectes.***

• El pendent de la recta tangent a $f(x)$ en $x = 2$ és:

$$f'(x) = 2 - 2x \;\rightarrow\; f'(2) = -2$$

• El pendent de la recta tangent a $g(x)$ en $x = 2$ és:

$$g'(x) = 2x - 1 \;\rightarrow\; g'(2) = 3$$

• L'angle que formen les dues rectes serà:

$$tg\,\alpha = \left|\frac{-2 - 3}{1 - 6}\right| = 1 \;\rightarrow\; \alpha = 45°$$

43. **Troba el domini de definició, màxims, mínims i intervals de creixement i decreixement de les funcions següents:**

a) $y = x^2 \ln x$ **b)** $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$

a) $y = x^2 \ln x$. *Domini* $= (0, +\infty)$

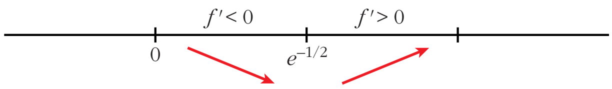
$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x(2 \ln x + 1) = 0$$

$x = 0$ (no val, ja que no figura en el domini)

$2 \ln x + 1 = 0 \;\rightarrow\; \ln x = -\dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; x = e^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

Signe de la derivada:



La funció: és decreixent en $(0, e^{-1/2})$

és creixent en $(e^{-1/2}, +\infty)$

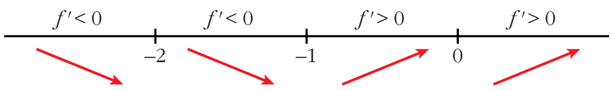
té un mínim en $\left(e^{-1/2}, \dfrac{-1}{2e}\right)$

b) $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$. *Domini* $= \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2x + 2}{3\sqrt[3]{(x^2 + 2x)^2}}$$ (La funció no és derivable en $x = 0$ ni en $x = -2$).

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x + 2 = 0 \;\rightarrow\; x = -1$$

Signe de la derivada:



La funció: és decreixent en $(-\infty, -1)$

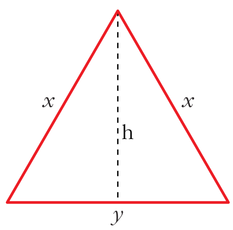
és creixent en $(-1, +\infty)$

té un mínim en $(-1, -1)$

44. **Entre tots els triangles isòsceles de perímetre 30 cm, quin és el d'àrea màxima?**

Perímetre $= 2x + y = 30 \;\rightarrow\; y = 30 - 2x$

Altura $= h = \sqrt{x^2 - \dfrac{y^2}{4}}$



$$\grave{A}rea = \frac{y \cdot h}{2} = \frac{(30-2x)\cdot\sqrt{x^2-\dfrac{(3c-2x)^2}{4}}}{2} =$$

$$= \frac{(30-2x)\cdot\sqrt{30x-225}}{2} = (15-x)\sqrt{30x-225} = \sqrt{(15-x)^2(30x-225)} =$$

$$= \sqrt{30x^3 - 1\,125x^2 + 13\,500x - 50\,625}$$

Hem de maximitzar la funció àrea:

$$f(x) = \sqrt{30x^3 - 1\,125x^2 + 13\,500x - 50\,625}$$

$$f'(x) = \frac{90x^2 - 2\,250x + 13\,500}{2\sqrt{30x^3 - 1\,125x^2 + 13\,500x - 50\,625}}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 90x^2 - 2\,250x + 13\,500 = 0$$

$$90(x^2 - 25x + 150) = 0$$

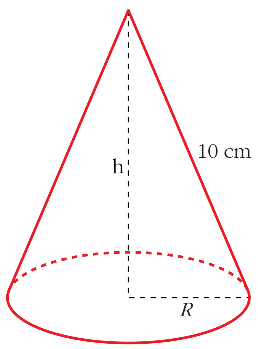
$$x = \frac{25 \pm \sqrt{625-600}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{25 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 15 \quad \text{(no val)} \\ x = 10 \end{cases}$$

($x = 15$ no val, ja que quedaria $y = 0$, atès que el perímetre és = 30)

($f'(x) > 0$ a l'esquerra de $x = 10$ i $f'(x) < 0$ a la dreta de $x = 10$. Per tant, en $x = 10$ hi ha un màxim).

Així doncs, el triangle d'àrea màxima és l'equilàter de costat 10 cm, l'àrea del qual és $25\sqrt{3} \approx 43{,}3$ cm^2.

45. Es vol construir un recipient cònic de generatriu 10 cm i de capacitat màxima. Quin ha de ser el radi de la base?



$$h^2 + R^2 = 100 \quad \to \quad R^2 = 100 - h^2$$

$$Volum = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi(100-h^2)h = \frac{1}{3}\pi(100h - h^3)$$

Hem de maximitzar la funció volum:

$$f(h) = \frac{1}{3}\pi(100h - h^3)$$

$$f'(h) = \frac{1}{3}\pi(100 - 3h^2)$$

$$f'(h) = 0 \quad \to \quad 100 - 3h^2 = 0 \quad \to \quad h = \sqrt{\frac{100}{3}}$$

(considerem l'arrel positiva, ja que $h \geq 0$).

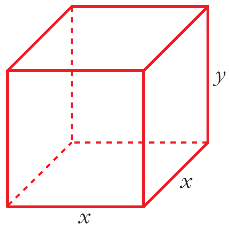
$\Bigg($ $f'(h) > 0$ a l'esquerra de $h = \sqrt{\dfrac{100}{3}}$ i $f'(h) < 0$ a la dreta de $h = \sqrt{\dfrac{100}{3}}$.

Per tant, en $h = \sqrt{\dfrac{100}{3}}$ hi ha un màxim).

Així doncs, el radi de la base serà:

$$R^2 = 100 - h^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3} \quad \rightarrow \quad R = \sqrt{\frac{200}{3}}$$

46. **Es desitja construir una caixa tancada de base quadrada la capacitat de la qual sigui 8 dm³. Calcula les dimensions de la caixa perquè la superfície exterior sigui mínima.**



$$Volum = x^2 y = 8 \text{ dm}^3 \quad \rightarrow \quad y = \frac{8}{x^2}$$

$$Superfície = 4xy + 2x^2 = 4x\frac{8}{x^2} + 2x^2 = \frac{32}{x} + 2x^2$$

Hem de trobar el mínim de la funció superfície:

$$f(x) = \frac{32}{x} + 2x^2 \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{-32}{x^2} + 4x = \frac{-32 + 4x^3}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad -32 + 4x^3 = 0 \quad \rightarrow \quad x^3 = 8 \quad \rightarrow \quad x = 2 \quad \rightarrow \quad y = 2$$

(En $x = 2$ hi ha un mínim, ja que tenim $f'(x) < 0$ per a $x < 2$ i $f'(x) > 0$, per a $x > 2$.)

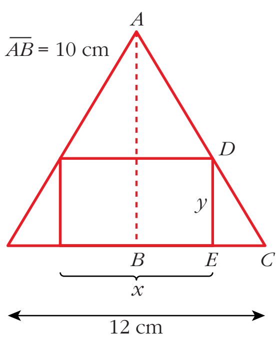
Així doncs, la caixa ha de ser un cub de costat 2 dm.

47. **En un triangle isòsceles de base 12 cm (el costat desigual) i altura 10 cm, s'inscriu un rectangle de forma que un dels seus costats estigui sobre la base del triangle, i dos dels seus vèrtexs sobre els costats iguals:**

a) Expressa l'àrea, A, del rectangle en funció de la longitud de la seva base, x, i digues quin és el domini de la funció.

b) Troba el valor màxim d'aquesta funció.

a)



Els triangles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{DEC}$ són semblants; així doncs:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}}$$

Com que $\overline{AB} = 10$ cm $\quad \overline{DE} = y$

$\overline{BC} = 6$ cm $\quad \overline{EC} = \dfrac{12 - x}{2}$

tenim que:

$$\frac{10}{y} = \frac{6}{\dfrac{12 - x}{2}} \quad \rightarrow \quad \frac{10}{y} = \frac{12}{12 - x}$$

$$10(12 - x) = 12y \quad \rightarrow \quad y = \frac{10(12 - x)}{12} = \frac{5(12 - x)}{6} = \frac{60 - 5x}{6}$$

Per tant, l'àrea del rectangle és:

$$A = x \cdot y = x \cdot \frac{(60-5x)}{6} = \frac{60x - 5x^2}{6} \;\rightarrow\; A(x) = \frac{60x - 5x^2}{6}$$

x pot adoptar valors entre 0 i 12. Per tant, el domini de $A(x)$ és:
Domini = (0, 12)

b) Trobem el màxim de $A(x)$:

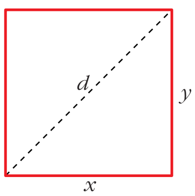
$$A'(x) = \frac{60 - 10x}{6}$$

$$A'(x) = 0 \;\rightarrow\; 60 - 10x = 0 \;\rightarrow\; x = 6 \;\rightarrow\; y = 5$$

(En $x = 6$ hi ha un màxim, ja que tenim $A'(x) > 0$ per a $x < 6$ i $A'(x) < 0$, per a $x > 6$.)

El màxim de la funció $A(x)$ s'assoleix en $x = 6$, que correspon al rectangle de base 6 cm i altura 5 cm. En aquest cas, l'àrea és de 30 cm^2 (que és l'àrea màxima).

48. De tots els rectangles d'àrea 100 dm^2, troba les dimensions del que tingui la diagonal mínima.



$$\textit{Àrea} = x \cdot y = 100 \text{ dm}^2 \;\rightarrow\; y = \frac{100}{x}$$

La diagonal mesura:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{100}{4}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{10\,000}{x^2}}$$

Hem de minimitzar la funció:

$$d(x) = \sqrt{x^2 + \frac{10\,000}{x^2}}$$

$$d'(x) = \frac{2x - \dfrac{20\,000}{x^3}}{2\sqrt{x^2 + \dfrac{10\,000}{x^2}}} = \frac{2x^4 - 20\,000}{2x^3\,\dfrac{\sqrt{x^4 + 10\,000}}{x}} = \frac{x^4 - 10\,000}{x^2\sqrt{x^4 + 10\,000}}$$

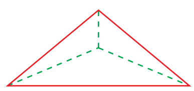
$$d'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^4 - 10\,000 = 0 \;\rightarrow\; x = \sqrt[4]{10\,000} = 10 \;\rightarrow\; x = 10 \;\rightarrow\; y = 10$$

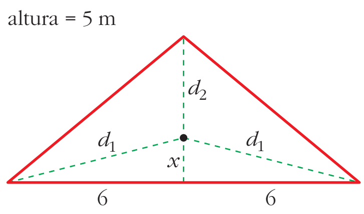
(En $x = 10$ hi ha un mínim, ja que $d'(x) < 0$ a l'esquerra de $x = 10$ i $d'(x) > 0$ a la dreta de $x = 10$.)

Així doncs, la diagonal mínima correspon al quadrat de costat 10 dm.

49. Un triangle isòsceles té el costat desigual de 12 m i l'altura relativa a aquest costat de 5 m.

Troba un punt sobre l'altura tal que la suma de distàncies als tres vèrtexs sigui mínima.





La suma de les distàncies als tres vèrtexs és:

$$S = 2d_1 + d_2$$

Però: $d_1 = \sqrt{x^2 + 36}$ i $d_2 = 5 - x$

Així doncs:

$$S(x) = 2\sqrt{x^2 + 36} + 5 - x$$

Hem de minimitzar la funció $S(x)$:

$$S'(x) = 2 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 36}} - 1 = \frac{2x - \sqrt{x^2 + 36}}{\sqrt{x^2 + 36}}$$

$$S'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x - \sqrt{x^2 + 36} = 0 \;\rightarrow\; 2x = \sqrt{x^2 + 36}$$

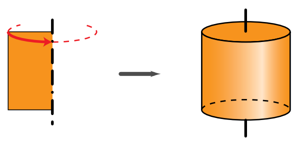
$$4x^2 = x^2 + 36 \;\rightarrow\; 3x^2 = 36 \;\rightarrow\; x^2 = 12 \;\rightarrow\; x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

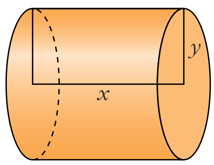
(considerem només l'arrel positiva, ja que $x \geq 0$).

(En $x = 2\sqrt{3}$ hi ha un mínim, ja que tenim $S'(x) < 0$ a l'esquerra d'aquest valor i $S'(x) > 0$ a la seva dreta.)

Per tant, el punt buscat es troba a $2\sqrt{3}\,\text{m}$ de la base, situat sobre l'altura.

50. Troba la base i l'altura d'una cartolina rectangular de perímetre 60 cm que, en fer la volta completa al voltant d'un costat vertical, generi un cilindre de volum màxim.





Perímetre cartolina $= 2x + 2y = 60 \;\rightarrow\; x + y = 30 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x = 30 - y$

Volum $= \pi y^2 x = \pi y^2(30 - y) = \pi(30y^2 - y^3)$

Hem de maximitzar la funció:

$$V(y) = \pi(30y^2 - y^3)$$

$$V'(y) = \pi(60y - 3y^2)$$

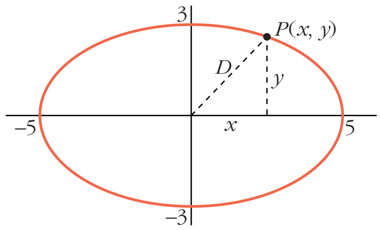
$$V'(y) = 60y - 3y^2 = 0 \;\rightarrow\; 3y(20 - y) = 0 \begin{cases} y = 0 \quad \text{(no val)} \\ y = 20 \;\rightarrow\; x = 10 \end{cases}$$

(En $y = 20$ hi ha un màxim, ja que tenim $V'(y) > 0$ a l'esquerra d'aquest valor i $V'(y) < 0$ a la seva dreta.)

Els costats de la cartolina mesuraran 20 cm i 10 cm.

51. El punt $P(x, y)$ recorre l'el·lipse d'equació: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

Dedueix les posicions del punt P per a les quals la seva distància al punt (0,0) és màxima i també aquelles per a les quals la seva distància és mínima.



La distància de P a $(0, 0)$ és:

$$D = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Com que P és un punt de l'el·lipse:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \to \quad y^2 = 9\left(1 - \frac{x^2}{25}\right)$$

Així, la distància és:

$$D(x) = \sqrt{x^2 + 9\left(1 - \frac{x^2}{25}\right)} = \sqrt{\frac{16x^2 + 225}{25}} = \frac{\sqrt{16x^2 + 225}}{5}$$

El domini de la funció és l'interval $[-5, 5]$.

Trobem el màxim i el mínim de $D(x)$:

$$D'(x) = \frac{32x}{10\sqrt{16x^2 + 225}}$$

$$D'(x) = 0 \quad \to \quad x = 0$$

(En $x = 0$ hi ha un mínim relatiu, ja que tenim $D'(x) < 0$ per a $x < 0$ i $D'(x) > 0$, per a $x > 0$.)

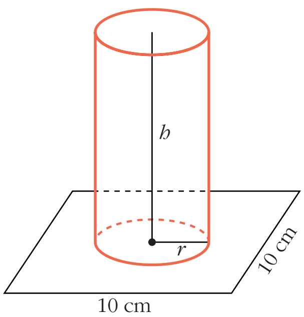
Vegem el valor de $D(x)$ en $x = 0$ i en els extrems de l'interval $[-5, 5]$:

$$D(0) = 3; \quad D(-5) = D(5) = 5$$

Per tant, les posicions de P que ens donen la distància màxima són $P(5, 0)$ i $P(-5, 0)$; i les que ens donen la distància mínima són $P(0, 3)$ i $P(0, -3)$.

52. En un quadrat de costat 10 cm volem recolzar la base d'un cilindre l'àrea lateral del qual és 50 cm².

Quin ha de ser el radi del cilindre perquè el seu volum sigui el major possible?



Àrea lateral cilindre $= 2\pi r h = 50\ \text{cm}^2 \quad \to \quad h = \dfrac{50}{2\pi r}$

El volum del cilindre és:

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot \frac{50}{2\pi r} = 25r \quad \to \quad V(r) = 25r$$

Com que la base està recolzada sobre el quadrat, tenim que el domini de $V(r)$ és l'interval $(0, 5]$.

Hem de maximitzar $V(r) = 25r$, amb $r \in (0, 5]$.

Com que $V(r)$ és una funció creixent, el seu màxim s'assoleix en $r = 5$.

53. **Donada la funció f: [1, e] $\rightarrow$ $\mathbb{R}$ definida per $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$, determina quines de les rectes tangents a la gràfica de f tenen el màxim pendent.**

El pendent de la recta tangent a $f(x)$ en $x = a$ és $f'(a)$. Hem de trobar el màxim de:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x}, \quad x \in [1, e]$$

Calculem la derivada de $f'(x)$; és a dir, $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{2-x}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 2 - x = 0 \rightarrow x = 2 \in [1, e]$$

(En $x = 2$ hi ha un màxim relatiu de $f'(x)$, ja que tenim $f''(x) > 0$ a l'esquerra d'aquest valor i $f''(x) < 0$ a la seva dreta.)

Trobem $f'(x)$ en $x = 2$ i en els extrems de l'interval $[1, e]$:

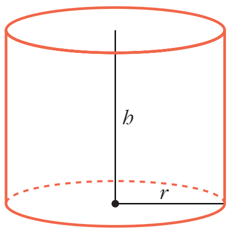
$$f'(2) = \frac{1}{4} = 0{,}25; \quad f'(1) = 0; \quad f'(e) = \frac{e-1}{e^2} \approx 0{,}23$$

Així doncs, la recta tangent amb pendent màxim és la recta tangent en $x = 2$. La trobem:

$$f(2) = \frac{1}{2} + \ln 2; \quad f'(2) = \frac{1}{4}$$

La recta és: $y = \frac{1}{2} + \ln 2 + \frac{1}{4}(x - 2)$

54. **Es vol construir un dipòsit de llautó amb forma de cilindre d'àrea total 54 cm^2. Determina el radi de la base i l'altura del cilindre perquè el volum sigui màxim.**



Àrea total $= 2\pi r h + 2\pi r^2 = 54$ cm^2

$$h = \frac{54 - 2\pi r^2}{2\pi r}$$

Volum $= \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot \frac{54 - 2\pi r^2}{2\pi r} = r(27 - \pi r^2) = 27r - \pi r^3$

Hem de maximitzar la funció $V(r) = 27r - \pi r^3$:

$$V'(r) = 27 - 3\pi r^2$$

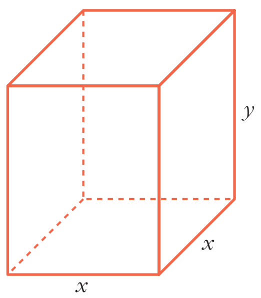
$$V'(r) = 0 \rightarrow 27 - 3\pi r^2 = 0 \rightarrow r^2 = \frac{27}{3\pi} = \frac{9}{\pi} \rightarrow r = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$$

(En $r = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$ hi ha un mínim, ja que tenim $V'(r) < 0$ a l'esquerra d'aquest valor i $V'(r) > 0$ a la seva dreta.)

Per a $r = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \rightarrow h = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$, dimensions del cilindre de volum màxim.

55. **Volem fer un envàs amb forma de prisma regular de base quadrada i capacitat 80 cm³. Per a la tapa i la superfície lateral usem un determinat material, però per a la base hem d'utilitzar un material un 50% més car.**

Troba les dimensions d'aquest envàs perquè el preu en sigui el menor possible.



$Volum = x^2 y = 80 \text{ cm}^3 \;\rightarrow\; y = \dfrac{80}{x^2}$

Per a la tapa i el lateral $\rightarrow$ z €/cm²

Per a la base $\rightarrow$ $1{,}5z$ €/cm²

El preu total serà:

$$P = z(x^2 + 4xy) + 1{,}5z(x^2) = z\left(x^2 + 4x \cdot \frac{80}{x^2}\right) + 1{,}5x^2 z =$$

$$= z\left(x^2 + \frac{320}{x}\right) + 1{,}5x^2 z = z\left(x^2 + \frac{320}{x} + 1{,}5x^2\right) =$$

$$= z\left(2{,}5x^2 + \frac{320}{x}\right)$$

Hem de minimitzar la funció que ens dóna el preu:

$$P(x) = z\left(2{,}5x^2 + \frac{320}{x}\right)$$

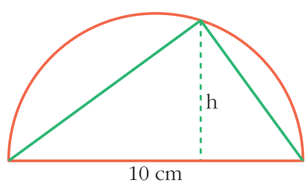
$$P'(x) = z\left(5x - \frac{320}{x^2}\right) = z\left(\frac{5x^3 - 320}{x^2}\right)$$

$$P'(x) = 0 \;\rightarrow\; 5x^3 - 320 = 0 \;\rightarrow\; x^3 = 64 \;\rightarrow\; x = 4 \;\rightarrow\; y = 5$$

(En $x = 4$ hi ha un mínim, ja que tenim $P'(x) < 0$ a l'esquerra d'aquest valor i $P'(x) > 0$ a la seva dreta).

L'envàs ha de tenir la base quadrada de costat 4 cm i 5 cm d'altura.

56. **Entre tots els triangles inscrits en una semicircumferència de 10 cm de diàmetre, quin és el d'àrea màxima?**



La base mesura 10 cm. L'àrea és:

$Àrea = \dfrac{10 \cdot h}{2} = 5h; \quad h \in (0, 5].$

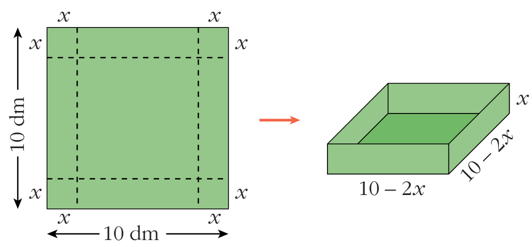
El d'àrea màxima serà el que tingui la màxima altura; és a dir, $h = 5$ cm. La seva àrea és 25 cm².

Pàgina 276

57. **Amb una làmina quadrada de 10 dm de costat es vol construir una caixa sense tapa. Per fer-ho, es retallen uns quadrats dels vèrtexs.**

Calcula el costat del quadrat retallat perquè el volum de la caixa sigui màxim.

Si l'altura de la caixa no pot passar de 2 dm, quina és la mesura del costat del quadrat que hem de retallar?



El volum de la caixa és:

$V(x) = x(10 - 2x)^2, \quad x \in (0, 5)$

Hem de maximitzar aquesta funció:

$$V(x) = x(10 - 2x)^2 = x(100 + 4x^2 - 40x) = 4x^3 - 40x^2 + 100x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 80x + 100 = 4(3x^2 - 20x + 25)$$

$$V'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 300}}{6} = \frac{20 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{20 \pm 10}{6} \begin{cases} x = 5 \;\; \text{(no val)} \\ x = 5/3 \end{cases}$$

(En $x = 5/3$ hi ha un màxim, ja que la derivada és positiva a l'esquerra d'aquest valor i és negativa a la seva dreta.)

Per tant, el costat del quadradet és $x = 5/3$.

Si l'altura no pot passar de 2 dm; és a dir, si $x \in (0, 2)$, obtenim el mateix resultat: $x = 5/3$.

58. Donat $r > 0$, prova que entre tots els nombres positius x i y tals que $x^2 + y^2 = r$, la suma $x + y$ és màxima quan $x = y$.

Com que $x^2 + y^2 = r$ i ens diuen que $y > 0$, aleshores: $y = \sqrt{r - x^2}$

Així doncs, la suma és: $S = x + y = x + \sqrt{r - x^2}$

Hem de maximitzar la funció $S(x) = x + \sqrt{r - x^2}$:

$$S'(x) = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{r - x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{r - x^2}} = \frac{\sqrt{r - x^2} - x}{\sqrt{r - x^2}}$$

$$S'(x) = 0 \;\rightarrow\; \sqrt{r - x^2} = x \;\rightarrow\; r - x^2 = x^2 \;\rightarrow\; r = 2x^2 \;\rightarrow\; x^2 = \frac{r}{2}$$

Com que $x > 0 \;\rightarrow\; x = \sqrt{\frac{r}{2}}$

(En $x = \sqrt{\frac{r}{2}}$ hi ha un màxim, ja que tenim $S'(x) > 0$ a l'esquerra d'aquest valor i $S'(x) < 0$, a la seva dreta).

Trobem y: $y = \sqrt{r - x^2} = \sqrt{r - \frac{r}{2}} = \sqrt{\frac{r}{2}}$

Per tant, la suma és màxima quan $x = y = \sqrt{\frac{r}{2}}$.

59. **El valor, en milions d'euros, d'una empresa en funció del temps t ve donat per $f(t) = 9 - (t - 2)^2$, $0 \le t \le 4{,}5$.**

Dedueix en quin valor de t en va aconseguir el màxim valor i en quin valor de t n'aconseguí el valor mínim.

Derivem la funció $f(t)$:

$$f'(t) = -2(t - 2)$$

Els punts crítics són:

$$f'(t) = 0 \quad \rightarrow \quad -2(t - 2) = 0 \quad \rightarrow \quad t - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad t = 2$$

La funció f té un punt crític en $(2, 9)$.

$$f''(t) = -2$$

$$f''(2) = -2 < 0 \quad \rightarrow \quad (2, 9) \text{ és un màxim.}$$

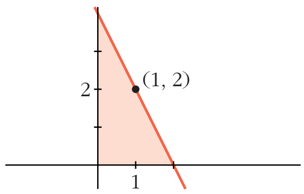
A més, com que la funció és una paràbola amb les branques cap avall, el mínim s'assolirà en un dels extrems de l'interval:

$$f(0) = 5$$

$$f(4{,}5) = 2{,}75 \quad \rightarrow \quad (4{,}5;\ 2{,}75) \text{ és un mínim.}$$

Així doncs, el màxim s'assolirà per a $t = 2$ i el mínim per a $t = 4{,}5$.

60. **De totes les rectes que passen pel punt (1, 2), troba la que determina amb els eixos de coordenades, i en el primer quadrant, un triangle d'àrea mínima.**



Les rectes que passen pel punt $(1, 2)$ són de la forma:

$$y = 2 + m(x - 1)$$

Trobem els punts de tall amb els eixos de la recta:

— Amb l'eix Y $\rightarrow$ $x = 0$ $\rightarrow$ $y = 2 - m$ $\rightarrow$ Punt $(0, 2 - m)$

— Amb l'eix X $\rightarrow$ $y = 0$ $\rightarrow$ $x = 1 - \frac{2}{m}$ $\rightarrow$ Punt $\left(1 - \frac{2}{m}, 0\right)$

L'àrea del triangle és:

$$A(m) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{m}\right)(2 - m) = \frac{1}{2}\left(2 - m - \frac{4}{m} + 2\right) = \frac{1}{2}\left(4 - m - \frac{4}{m}\right)$$

Trobem el mínim de la funció:

$$A'(m) = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{4}{m^2}\right) = \frac{-m^2 + 4}{2m^2}$$

$$A'(m) = 0 \quad \rightarrow \quad -m^2 + 4 = 0 \begin{cases} m = 2 \ \text{(no val)} \\ m = -2 \end{cases}$$

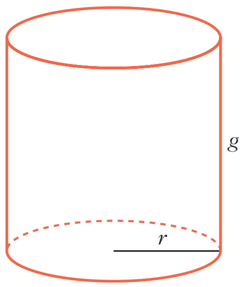
($m = 2$ no val, ja que no formarà un triangle en el primer quadrant la recta amb els eixos).

(En $m = -2$ hi ha un mínim, ja que tenim $A'(m) < 0$ a l'esquerra d'aquest valor i $A'(m) > 0$ a la seva dreta.)

Així doncs, la recta és:

$$y = 2 - 2(x - 1); \text{ és a dir: } y = -2x + 4$$

61. **Calcula la generatriu i el radi que ha de tenir un pot cilíndric de llet condensada, l'àrea total del qual (incloent-hi les dues tapes) és de 150 cm², perquè el seu volum sigui màxim.**



$$\textit{Àrea total} = 2\pi r g + 2\pi r^2 = 150 \text{ cm}^2$$

$$g = \frac{150 - 2\pi r^2}{2\pi r}$$

$$\textit{Volum} = \pi r^2 g = \pi r^2 \cdot \frac{150 - 2\pi r^2}{2\pi r} = 75r - \pi r^3$$

Hem de maximitzar el volum:

$$V(r) = 75r - \pi r^3; \quad V'(r) = 75 - 3\pi r^2$$

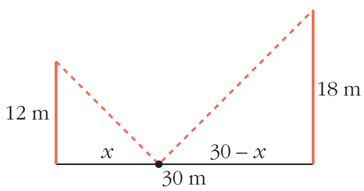
$$V'(r) = 0 \;\rightarrow\; 75 - 3\pi r^2 = 0 \;\rightarrow\; r = \sqrt{\frac{75}{3\pi}} = \sqrt{\frac{25}{\pi}} = \frac{5}{\sqrt{\pi}}$$

(Només considerem l'arrel positiva, ja que $r > 0$.)

(En $r = \dfrac{5}{\sqrt{\pi}}$ hi ha un màxim, ja que tenim $V'(r) > 0$ a l'esquerra d'aquest valor i $V'(r) < 0$ a la seva dreta.)

Per tant: $r = \dfrac{5}{\sqrt{\pi}}$ i $g = \dfrac{10}{\sqrt{\pi}}$

62. **Dos pals de 12 i 18 m d'altura disten entre si 30 m. Es desitja col·locar un cable que uneixi un punt del terra entre els dos pals amb els extrems d'aquests. On cal situar el punt del terra perquè la longitud total del cable sigui mínima?**



La longitud total del cable és:

$$L(x) = \sqrt{x^2 + 12^2} + \sqrt{(30 - x)^2 + 18^2}; \text{ és a dir:}$$

$$L(x) = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1\,224}$$

$$L'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{2x - 60}{2\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{x - 30}{\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224}} =$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224} + (x - 30)\sqrt{x^2 + 144}}{\sqrt{(x^2 + 144)(x^2 - 60x + 1\,224)}}$$

$$L'(x) = 0 \;\rightarrow\; x\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224} + (x - 30)\sqrt{x^2 + 144} = 0$$

$$x\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224} = -(x - 30)\sqrt{x^2 + 144}$$

$$x^2(x^2 - 60x + 1\,224) = (x - 30)^2(x^2 + 144)$$

$$x^4 - 60x^3 + 1\,224x^2 = (x^2 - 60x + 900)(x^2 + 144)$$

$$x^4 - 60x^3 + 1\,224x^2 = x^4 + 144x^2 - 60x^3 - 8\,640x + 900x^2 + 129\,600$$

$$180x^2 + 8\,640x - 129\,600 = 0$$

$$x^2 + 48x - 720 = 0$$

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{2\,304 + 2\,880}}{2} = \frac{-48 \pm \sqrt{5\,184}}{2} = \frac{-48 \pm 72}{2} \begin{cases} x = 12 \\ x = -60 \;\; \text{(no val)} \end{cases}$$

(En $x = 12$ hi ha un mínim, ja que tenim $L'(x) < 0$ a l'esquerra d'aquest valor i $L'(x) > 0$ a la seva dreta.)

Per tant, el punt del terra ha de situar-se a 12 m del pal de 12 m (i a 18 m del pal de 18 m).

63. Calcula el punt de la corba $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ en què el pendent de la recta tangent sigui màxim.

El pendent de la recta tangent a $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ en x és $f'(x)$. Hem de trobar el màxim de $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1 + x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2(1 + x^2)^2 + 2x \cdot 2(1 + x^2) \cdot 2x}{(1 + x^2)^4} = \frac{-2(1 + x^2) + 8x^2}{(1 + x^2)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(1 + x^2)^3}$$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 6x^2 - 2 = 0 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$f'' > 0$ $\quad$ $f'' < 0$ $\quad$ $f'' > 0$

$-\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ $\quad$ $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$

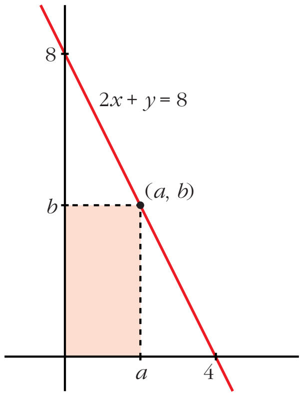
$$\lim_{x \to -\infty} f'(x) = \lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$$

En $x = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ hi ha un màxim (absolut) de $f'(x)$ i en $x = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$ hi ha un mínim (absolut) de $f'(x)$.

Per tant, el punt en el qual el pendent de la recta tangent és màxim és:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$$

64. **Dins del triangle limitat pels eixos OX i OY i la recta $2x + y = 8$, s'inscriu un rectangle de vèrtexs $(a, 0)$, $(0, 0)$, (a, b) i $(0, b)$. Determina el punt (a, b) a què correspon el rectangle d'àrea màxima.**



- El punt (a, b) és un punt de la recta $2x + y = 8$. Per tant, $2a + b = 8$; és a dir, $b = 8 - 2a$.
- Com que el rectangle està inscrit en el triangle, $a \in (0, 4)$.
- L'àrea del rectangle és:

  $\grave{A}rea = a \cdot b = a \cdot (8 - 2a) = 8a - 2a^2, \quad a \in (0, 4)$

- Hem de maximitzar la funció:

  $A(a) = 8a - 2a^2, \quad a \in (0, 4)$

  $A'(a) = 8 - 4a = 0 \quad \to \quad a = 2 \quad \to \quad b = 4$

(En $a = 2$ hi ha un màxim, ja que tenim $A'(a) > 0$ a l'esquerra d'aquest valor i $A'(a) < 0$ a la seva dreta.)

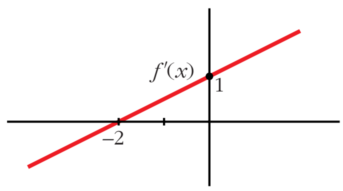
- Per tant, el punt és $(2, 4)$.

QÜESTIONS TEÒRIQUES

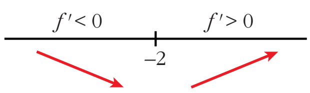
65. **La gràfica adjunta correspon a la funció derivada, f', d'una funció f.**

a) Estudia el creixement i decreixement de f i digues si té màxim o mínim.

b) Estudia la concavitat i convexitat de f. Té punt d'inflexió?



a) Signe de la derivada:



$f'(-2) = 0$

Per tant, la funció f és decreixent en $(-\infty, -2)$

és creixent en $(-2, +\infty)$

té un mínim en $x = -2$.

b) Com que $f'(x)$ és una recta amb pendent $\frac{1}{2}$, aleshores $f''(x) = \frac{1}{2} > 0$.

Per tant, f és una funció còncava. No té punts d'inflexió.

66. **Troba una funció f la gràfica de la qual no sigui una recta i on hi hagi infinits punts en què la recta tangent a la gràfica de f sigui $y = 1$.**

$$f(x) = \cos x$$

Vegem que la recta tangent a $f(x)$ en els punts de la forma $x = 2\pi k$, amb $k \in Z$, és $y = 1$.

$$f(2\pi k) = \cos(2\pi k) = 1$$

$$f'(x) = -\sin x \quad \rightarrow \quad f'(2\pi k) = -\sin(2\pi k) = 0$$

La recta tangent és:

$$y = 1$$

67. **Sigui $f(x) = ax + \dfrac{b}{x}$, amb a i b nombres positius. Demostra que el valor mínim de f en $(0, +\infty)$ és $2\sqrt{ab}$.**

$$f'(x) = a - \frac{b}{x^2} = \frac{ax^2 - b}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad ax^2 - b = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$f''(x) = \frac{2b}{x^3}$$

$$f''\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right) > 0 \quad \rightarrow \quad \text{en } x = \sqrt{\frac{b}{a}} \text{ hi ha un mínim.}$$

$$f''\left(-\sqrt{\frac{b}{a}}\right) < 0 \quad \rightarrow \quad \text{en } x = -\sqrt{\frac{b}{a}} \text{ hi ha un màxim.}$$

A més, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ i $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Així doncs, a $x = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$ es troba el mínim absolut de $f(x)$.

Aquest mínim val:

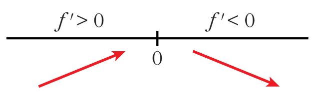
$$f\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = a \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{\sqrt{b/a}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{ab} + \sqrt{ab} = 2\sqrt{ab}$$

És a dir, el mínim de $f(x)$ en $(0, +\infty)$ és $2\sqrt{ab}$.

68. **Si la funció f té derivades primera i segona i és $f'(a) = 0$ i $f''(a) = 0$, pot presentar f un màxim relatiu en el punt a? En cas afirmatiu, posa'n un exemple.**

Sí pot presentar un màxim. Per exemple:

$f(x) = -x^4$ en $x = 0$ és de manera que:



$f'(x) = -4x^3 \qquad f''(x) = -12x^2$

Per tant: $f'(0) = 0$ i $f''(0) = 0$

En $(0, 0)$ hi ha un màxim relatiu.

69. **Una funció f és decreixent en el punt a i derivable en aquest.**

Pot ser $f'(a) > 0$?

Pot ser $f'(a) = 0$?

Pot ser $f'(a) < 0$? Raona-ho.

Si f és decreixent en $x = a$ i és derivable en ell mateix, aleshores $f'(a) \leq 0$.

Ho demostrem:

$$f \text{ decreixent en } a \;\rightarrow\; \text{signe de } [f(x) - f(a)] \neq \text{signe de } (x - a) \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$$

Per tant, $f'(x) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$; és a dir: $f'(a) \leq 0$

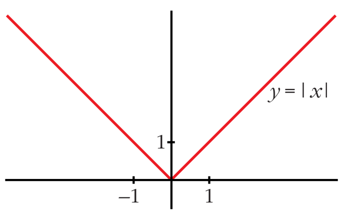
Exemple: $f'(a) = -x^3$ és decreixent en $\mathbb{R}$ i hem de:

$$f'(x) = -3x^2 \;\rightarrow\; \begin{cases} f'(0) = 0 \;\; (\text{i } f(x) \text{ és decreixent en } x = 0) \\ f'(0) < 0 \;\; \text{per a } x \neq 0 \end{cases}$$

70. **La funció $|x|$ (valor absolut de x), presenta un mínim relatiu en algun punt? En quins punts és derivable? Raona-ho.**

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}; \quad f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f(x)$ no és derivable en $x = 0$, ja que $f'(0^-) = -1 \neq f'(0^+) = 1$.



Per tant, f és derivable per a $x \neq 0$.

Però $f(x)$ presenta un mínim relatiu en $x = 0$, ja que $f(0) = 0 < f(x)$ si $x \neq 0$. De fet, és el mínim absolut de $f(x)$.

71. **Un polinomi de 3r grau $ax^3 + bx^2 + cx + d$ té un màxim relatiu en el punt $x = p$. Aquest màxim relatiu, pot ser màxim absolut de la funció? Raona-ho.**

Un polinomi de tercer grau *no* té màxim absolut.

Vegem per què:

• Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, amb $a > 0$, aleshores:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \;\to\; f(x) \text{ } \textit{no} \text{ té màxim absolut.}$$

• Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, amb $a < 0$, aleshores:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \;\to\; f(x) \text{ } \textit{no} \text{ té màxim absolut.}$$

72. Si $f''(x) > 0$ per a tot x del domini de f, què podem dir de la gràfica de f?

Serà una funció còncava.

Pàgina 277

73. D'una funció f sabem que $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ i $f'''(a) = 5$. Podem assegurar que f té màxim, mínim o punt d'inflexió en $x = a$?

f té un punt d'inflexió en $x = a$.

Vegem per què:

$f'''(a) = 5 > 0 \;\to\; f''$ és creixent en $x = a$.

Com que, d'altra banda, $f''(a) = 0$, tenim que $f''(x) < 0$ a l'esquerra de a i $f''(x) > 0$ a la seva dreta. És a dir, $f(x)$ canvia de convexa a còncava en $x = a$.

Per tant, hi ha un punt d'inflexió en $x = a$.

74. Si $f'(a) = 0$, quina d'aquestes proposicions és certa?

a) f té màxim o mínim en $x = a$.

b) f té una inflexió en $x = a$.

c) f té en $x = a$ tangent paral·lela a l'eix OX.

Si $f'(a) = 0$, només podem assegurar que f té en $x = a$ tangent horitzontal (paral·lela a l'eix OX).

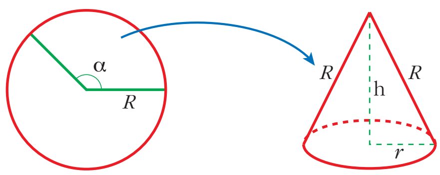
Podria tenir un màxim, un mínim o un punt d'inflexió en $x = a$.

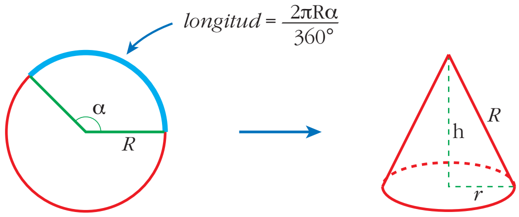
Per tant, només és certa la proposició c).

PER APROFUNDIR

75. Si d'un disc metàl·lic traiem un sector circular, podem construir un got cònic.

Determina el sector circular que hem de treure perquè el volum del got sigui màxim.





• Longitud de la circumferència de la base del con:

$$L = 2\pi r = \frac{2\pi R\alpha}{360} \;\rightarrow\; r = \frac{R\alpha}{360}$$

• Altura del con: $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \dfrac{R^2\alpha^2}{129\,600}} = \dfrac{R}{360}\sqrt{129\,600 - \alpha^2}$

• Volum del con:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2\alpha^2}{360^2} \cdot \frac{R}{360} \cdot \sqrt{129\,600 - \alpha^2} = \frac{\pi}{3}\left(\frac{R}{360}\right)^3 \sqrt{129\,600\,\alpha^4 - \alpha^6}$$

$$V(\alpha) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{R}{360}\right)^3 \sqrt{129\,600\,\alpha^4 - \alpha^6}$$

• Trobem α perquè el volum sigui màxim:

$$V'(\alpha) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{R}{360}\right)^3 \cdot \frac{518\,400\alpha^3 - 6\alpha^5}{2\sqrt{129\,600\,\alpha^4 - \alpha^6}}$$

$$V'(\alpha) = 0 \;\rightarrow\; 518\,400\alpha^3 - 6\alpha^5 = 0$$

$$6\alpha^3(86\,400) - \alpha^2) = 0 \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 293°\ 56'\ 20'' \\ \alpha = -293°\ 56'\ 20'' \end{cases}$$

El màxim s'assoleix en $\alpha = 293°\ 56'\ 20''$ (la derivada és positiva a la seva esquerra i negativa a la seva dreta, i estem considerant x entre 0° i 360°).

Així doncs, el con tindrà un radi $r = \dfrac{R\sqrt{6}}{3}$ i una altura $h = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$.

El seu volum seria $\dfrac{2\pi R^3 \cdot \sqrt{3}}{27}$.

76. Les busques d'un rellotge mesuren 4 i 6 cm i, unint-ne els extrems, es forma un triangle. Determina l'instant entre les 12 h i les 12 h 30 min en què l'àrea del triangle és màxima.

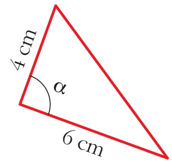
☛ ***Quin angle recorre l'agulla horària en t minuts? I el minuter? Quin és l'angle que formen entre les dues en t minuts?***

• L'agulla horària recorre un angle de 360° en 12 hores; és a dir, 0,5° en 1 minut; o bé $0{,}5t$° en t minuts.

- El minuter recorre 360° en 1 hora; és a dir, 6° en 1 minut; o bé $6t°$ en t minuts.

- Al cap de t minuts, les dues busques formaran un angle de $\alpha = 6t° - 0{,}5t° = 5{,}5t°$.

- L'àrea del triangle serà:



$$\text{Àrea} = \frac{4 \cdot 6 \cdot sin\,(5{,}5t)}{2} = 12\ sin\,(5{,}5t)$$

$$A(t) = 12\ sin\,(5{,}5t)$$

- Trobem el màxim de $A(t)$, tenint en compte que $t \in (0,\ 30)$ (ja que estem considerant entre les 12 h i les 12 h 30 min):

$$A'(t) = 12 \cdot 5{,}5 \cdot cos\,(5{,}5t) = 0 \xrightarrow{(*)} 5{,}5t = 90 \rightarrow t = \frac{90}{5{,}5} =$$

$$= 16{,}\widehat{36} = 16 \text{ minuts i } 22 \text{ segons}$$

(*) (Si igualem $5{,}5t$ a un angle major de 90°, obtenim $t > 30$ min.)

(En $t = 16{,}\widehat{36}$ minuts hi ha un màxim, ja que la derivada és positiva a la seva esquerra i negativa a la seva dreta.)

Així doncs, el triangle d'àrea màxima es forma a les 12 h 16 min 22 segons.

77. Comprova que, en la funció de proporcionalitat inversa $f(x) = \frac{k}{x}$, obtenim que el punt c, que compleix $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, és, precisament, la mitjana geomètrica de a i b, $c = \sqrt{ab}$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(c) = \dfrac{-k}{c^2} \\[2ex] \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{\dfrac{k}{b} - \dfrac{k}{a}}{b - a} = \dfrac{\dfrac{ka - kb}{ab}}{b - a} = \dfrac{-k(b - a)}{ab(b - a)} = \dfrac{-k}{ab} \end{array}\right\}$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \rightarrow \frac{-k}{c^2} = \frac{-k}{ab} \rightarrow c^2 = ab \rightarrow c = \sqrt{ab}$$

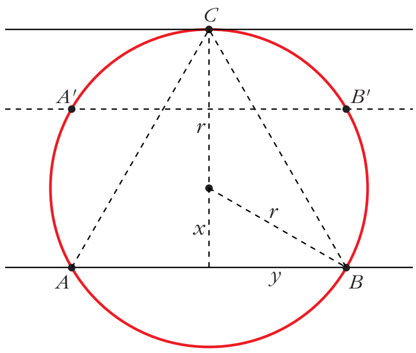
(Suposem $k > 0$, $a > 0$, $b > 0$.)

78. En una circumferència de radi r es traça la tangent en un punt qualsevol C i una corda AB paral·lela a aquesta tangent. Hi obtenim, així, un triangle ABC l'àrea del qual volem que sigui la major possible.

Demostra que, per fer-ho, la distància de C a la corda ha de ser $\frac{3}{2}$ del radi.

- L'altura del triangle ha de ser més gran que el radi, ja que, si tracem la corda per

$A'B'$, podem aconseguir un altre triangle amb la mateixa base, AB, i una altura més gran, i, així, amb una àrea també més gran.



- Expressem l'àrea del triangle en funció de x:

$altura = x + r$

$$\left.\begin{array}{l} base = 2y \\ y = \sqrt{r^2 - x^2} \end{array}\right\} \rightarrow \; base = 2\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$Àrea = \frac{2(x + r)\sqrt{r^2 - x^2}}{2} = (x + r)\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$A(x) = (x + r)\sqrt{r^2 - x^2}; \quad x \in [0, r)$$

- Obtenim el valor de x per al qual $A(x)$ assoleix el màxim:

$$A'(x) = \sqrt{r^2 - x^2} + (x + r) \cdot \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r^2 - x^2 - x(x + r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} =$$

$$= \frac{r^2 - x^2 - x^2 - rx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-2x^2 - rx + r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x^2 - rx + r^2 = 0$$

$$x = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 8r^2}}{-4} = \frac{r \pm \sqrt{9r^2}}{-4} = \frac{r \pm 3r}{-4} \begin{cases} x = -r \ \text{(no val)} \\ x = -2r/-4 = r/2 \end{cases}$$

(En $x = \dfrac{r}{2}$ hi ha un màxim, ja que tenim $A'(x) > 0$ a l'esquerra d'aquest valor i $A'(x) < 0$ a la seva dreta.)

- El màxim s'assoleix en $x = \dfrac{r}{2}$. Per tant, la distància de C a la corda, que és l'altura del triangle, és:

$$h = r + \frac{r}{2} = \frac{3r}{2}$$

- **Observació:**

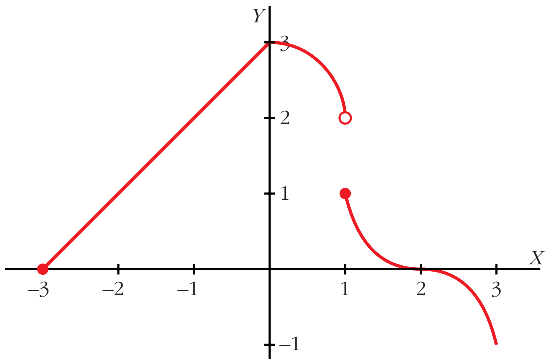
Calculem la longitud dels costats del triangle:

$$AB = base = 2\sqrt{r^2 - x^2} = 2\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = r\sqrt{3}$$

$$AC = BC = \sqrt{y^2 - h^2} = \sqrt{(r^2 - x^2) + \left(\frac{3r}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4} + \frac{9r^2}{4}} = r\sqrt{3}$$

Per tant, hem obtingut que el triangle inscrit en una circumferència que ens dóna l'àrea màxima és el triangle equilàter.

79. **De la funció $f(x)$ definida en $[-3, 3]$ en coneixem la gràfica següent:**



a) Estudia la continuïtat de la funció.

b) Estudia la derivabilitat de la funció.

c) Dibuixa raonadament la gràfica de $f'(x)$.

a) La funció és contínua en tot el seu domini, excepte en $x = 1$; atès que:

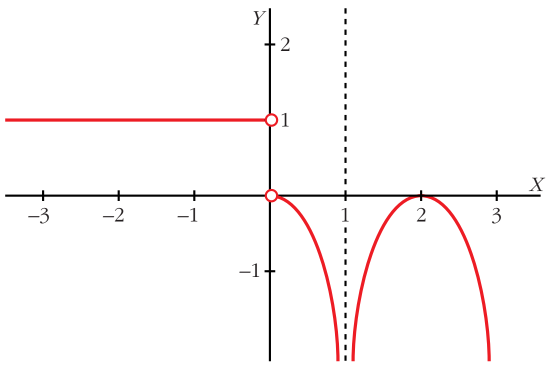
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1 \end{array}\right\} \text{ En } x = 1 \text{ hi ha una discontinuïtat de salt finit.}$$

b) La funció és derivable, excepte en $x = 0$ i en $x = 1$.

En $x = 0$ hi ha "una punta"; és a dir, $f'(0^-) \neq f'(0^+)$.

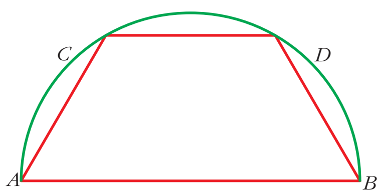
En $x = 1$ *no* és contínua la funció; per tant, no pot ser derivable.

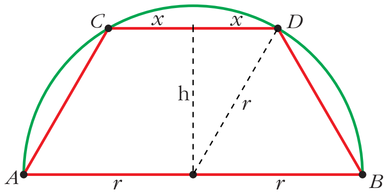
c)



PER PENSAR UNA MICA MÉS

80. **En una semicircumferència de diàmetre $AB = 2r$ es traça una corda CD paral·lela a AB. Quina ha de ser la longitud d'aquesta corda perquè l'àrea del trapezi $ABDC$ sigui màxima?**





- Anomenem x la meitat de la base CD; és a dir, la meitat de la longitud de la corda.

- L'altura del trapezi serà:

$$h = \sqrt{r^2 - x^2}$$

- L'àrea del trapezi és:

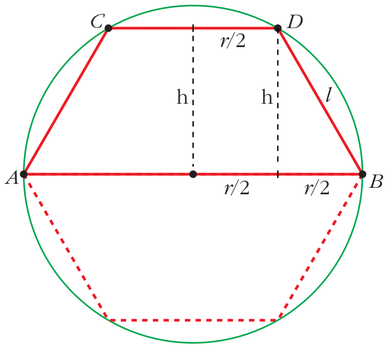
$$\text{Àrea} = \frac{(2r + 2x) \cdot h}{2} = (r + x) \cdot h = (r + x) \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$A(x) = (r + x) \cdot \sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in (0, r)$$

Aquesta funció és la mateixa que vam obtenir a l'exercici **78**; per tant, assoleix el màxim en $x = \frac{r}{2}$ (vegeu aquest exercici).

- Així doncs, la longitud de la corda és $2x = r$; és a dir, $CD = r$.

Observació:



Si completem la figura de forma simètrica, obtenim un hexàgon d'àrea màxima inscrit en una circumferència. Comprovem que es tracta d'un hexàgon regular:

$$CD = r$$

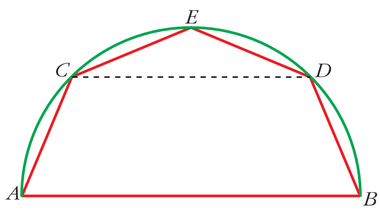
$$h = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \sqrt{\frac{3r^2}{4}}$$

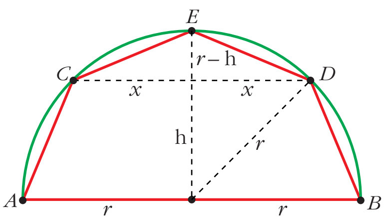
$$l = \sqrt{h^2 + \frac{r^2}{4}} = \sqrt{\frac{3r^2}{4} + \frac{r^2}{4}} = \sqrt{r^2} = r$$

Així doncs, el costat de l'hexàgon és r, igual al radi de la circumferència.

Per tant, l'hexàgon inscrit en una circumferència que ens dóna l'àrea màxima és l'hexàgon regular.

81. En la figura del problema anterior, hem anomenat *E* el punt mitjà de l'arc *CD* i hem dibuixat el pentàgon *ACEDB*. Calcula la longitud de la corda *CD* perquè l'àrea del pentàgon sigui màxima.





- Anomenem x la meitat de la longitud de la corda CD.

- L'àrea del pentàgon és igual a la suma de les àrees del trapezi $CDBA$ i del triangle CDE:

$$h = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$Àrea = \frac{(2r+2x)\cdot h}{2} + \frac{2x\cdot(r-h)}{2} = (r+x)\cdot\sqrt{r^2-x^2} + x(r-\sqrt{r^2-x^2}) =$$

$$= \cancel{x\sqrt{r^2-x^2}} + r\sqrt{r^2-x^2} + xr - \cancel{x\sqrt{r^2-x^2}} = xr + r\sqrt{r^2-x^2} = r\left[x+\sqrt{r^2-x^2}\right]$$

$$A(x) = r\left[x+\sqrt{r^2-x^2}\right], \quad x \in (0, r)$$

- Trobem el màxim de $A(x)$:

$$A'(x) = r\left[1 + \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{r^2-x^2}}\right] = r\left[\frac{\sqrt{r^2-x^2}-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right]$$

$$A'(x) = 0 \;\rightarrow\; \sqrt{r^2-x^2} - x = 0 \;\rightarrow\; \sqrt{r^2-x^2} = x$$

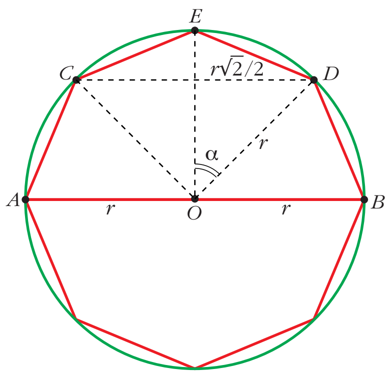
$$r^2 - x^2 = x^2 \;\rightarrow\; r^2 = 2x^2 \;\rightarrow\; x = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

(No considerarem l'arrel negativa, ja que $x \in (0, r)$.)

(En $x = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$ hi ha un màxim, ja que tenim $A'(x) > 0$ a l'esquerra d'aquest valor i $A'(x) < 0$ a la seva dreta.)

- El màxim s'assoleix en $x = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$; és a dir, la longitud de la corda per a la qual obtenim l'àrea màxima és $CD = r\sqrt{2}$.

Observació 1:



Si completem la figura anterior de forma simètrica, veiem que obtenim un octògon regular:

$$\sin\alpha = \frac{r\sqrt{2}/2}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\rightarrow\; \alpha = 45°$$

és a dir: $\widehat{EOD} = 45°$

A més:

$$\begin{cases} \widehat{EOC} = \widehat{EOD} \;\rightarrow\; \widehat{EOC} = 45° \\ \widehat{DOB} = 90° - \widehat{EOD} = 45° \\ \widehat{COA} = 90° - \widehat{EOC} = 45° \end{cases}$$

i $OA = OC = OE = OD = OB = r$

Per tant, es tracta d'un octògon regular.

Així doncs, hem obtingut que l'octògon inscrit en una circumferència que ens dóna l'àrea màxima és l'octògon regular.

Observació 2:

A l'exercici **78** vam obtenir el resultat per a un triangle; a l'exercici **80**, per a un hexàgon, i en aquest exercici, per a un octògon.

En general, el polígon de n costats inscrit en una circumferència que ens dóna l'àrea màxima és el polígon regular de n costats.