UNITAT 11 REPRESENTACIÓ DE FUNCIONS

Pàgina 278

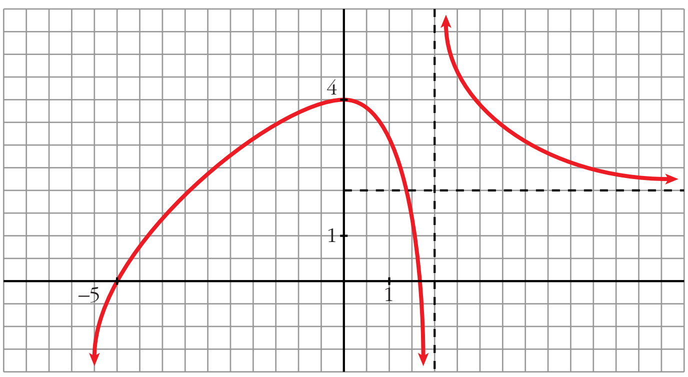
Descripció d'una gràfica

1. ■ **Copia en el quadern les dades enquadrades en vermell. A partir d'aquestes i sense mirar la gràfica que apareix al principi, representa aquesta funció sobre uns eixos coordenats dibuixats en paper quadriculat.**

(La solució és en el mateix exercici).

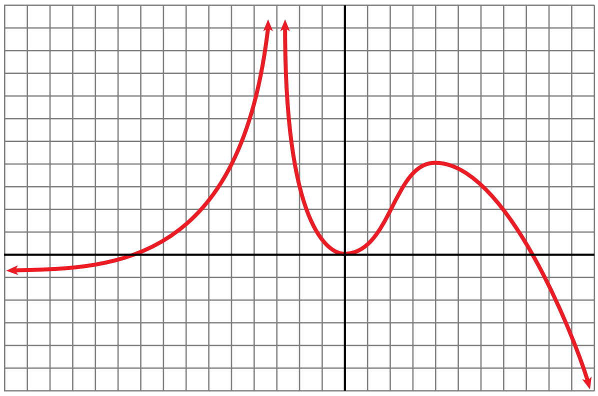
2. Traça uns eixos coordenats sobre paper quadriculat i representa-hi una corba, el més senzilla possible, que compleixi les condicions següents:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$
- $f(0) = 4$; $f'(0) = 0$
- $f(-5) = 0$; $f(1{,}75) = 0$
- f **es derivable en tot** $\mathbb{R}$, **excepte en** $x = 2$.



Pàgina 279

3. Descriu, amb la menor quantitat de dades i com als apartats anteriors, la funció següent:



- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$
- $f(-9) = 0;\ f(0) = 0;\ f(8) = 0$
- $f'(0) = 0$
- $f(4) = 4;\ f'(4) = 0$

4. Representa sobre uns eixos en paper quadriculat una gràfica inventada per tu. Descriu-la en paper a banda. Dóna'n la descripció a la teva companya o company perquè la representi.

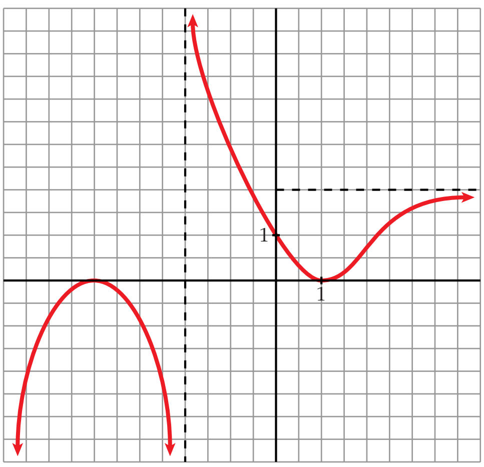
Representa tu la seva.

Compareu cada representació amb la corba original. Discutiu les diferències que hi observeu.

Hi ha cap error en la representació?

Hi ha, potser, error en la descripció?

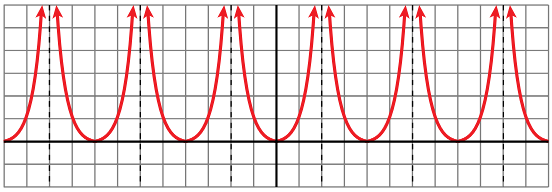
És tot correcte?



Per exemple:

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty;\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$
- $\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty;\quad \lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$
- $f(-4) = 0;\ f'(-4) = 0$
- $f(1) = 0;\ f'(1) = 0$
- $f(0) = 1$

5. Observa aquesta gràfica:



- **Troba l'ordenada per a les abscisses següents:**

$$x = 0,\ x = 1,\ x = 3,\ x = -7,\ x = 12,$$
$$x = -400,\ x = 13,\ x = -199$$

- **En quins punts no està definida aquesta funció?**
- **Quin tram de la funció et caldria conèixer per fer-te una idea exacta de com és la gràfica?**
- **Et suggereix aquesta corba cap tipus de simetria o periodicitat?**

- $f(0) = 0;\ f(1) = 1;\ f(3) = 1;\ f(-7) = 1$

  $f(12) = 0;\ f(-400) = 0;\ f(13) = 1;\ f(-199) = 1$

  (En general, $f(4k) = 0;\ f(4k+1) = f(4k-1) = 1$ i no existeix $f(x)$ en $x = 4k + 2$, amb $k \in \mathbb{Z}$).

- La funció no està definida en els punts de la forma $x = 4k + 2$, amb $k \in \mathbb{Z}$.

- Només caldria conèixer la funció per a $x \in [0, 2)$, si sapiguéssim que és parell i que és periòdica de període 4.

- Simetria $\rightarrow$ És una funció parell (simètrica respecte a l'eix Y).

  Periodicitat $\rightarrow$ És periòdica de període 4.

Pàgina 280

1. Troba el domini d'aquestes funcions:

a) $y = x^3 - 5x^2 + 7x + 3$ **b)** $y = \dfrac{3x^3 + 5}{x^2 - 5x + 4}$ **c)** $y = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$

a) $D = \mathbb{R}$

b) $x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2}$ $\begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$

$D = \mathbb{R} - \{1, 4\}$

c) $x^2 + 1 \neq 0$ per a tot $x \rightarrow D = \mathbb{R}$

2. Troba el domini de:

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ **b)** $y = \ln(x^2 + 1)$ **c)** $y = \ln(x^2 - 1)$ **d)** $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

a) $x^2 - 2x \geq 0 \rightarrow D = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

b) $x^2 + 1 > 0$ per a tot $x \rightarrow D = \mathbb{R}$

c) $x^2 - 1 > 0 \rightarrow D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

d) $x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow D = \mathbb{R} - \{0\}$

Pàgina 281

3. Troba les possibles simetries i periodicitats, digues on són contínues i on derivables:

a) $y = 3x^4 - 5x^2 - 1$ **b)** $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

d) $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$ **e)** $y = \sin x + 1/2\,(\sin 2x)$

a) $f(-x) = 3(-x)^4 - 5(-x)^2 - 1 = 3x^4 - 5x^2 - 1 = f(x)$

És una funció parell: simètrica respecte a l'eix Y.

No és periòdica.

És contínua i derivable en $\mathbb{R}$.

b) $Domini = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$f(-x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. No és parell ni senar; no és simètrica respecte a l'eix Y ni respecte al centre de coordenades.

No és periòdica.

És contínua en el seu domini.

És derivable en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

c) $Domini = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$f(-x) = \dfrac{-x^3}{x^2 - 1} = -f(x)$. És senar: simètrica respecte a l'origen de coordenades.

No és periòdica.

És contínua i derivable en el seu domini.

d) $Domini = \mathbb{R} - \{0\}$

$f(-x) = \dfrac{-x^3 - 1}{x^2}$. No és parell ni senar: no és simètrica respecte a l'eix Y ni respecte a l'origen de coordenades.

No és periódica.

És contínua i derivable en el seu domini.

e) $Domini = \mathbb{R}$

$$f(-x) = \sin(-x) + \frac{1}{2}\big(\sin(-2x)\big) = -\sin x - \frac{1}{2}\big(\sin(2x)\big) = -f(x)$$

És senar: simètrica respecte a l'origen de coordenades.

És periòdica de període 2π.

És contínua i derivable en $\mathbb{R}$.

Pàgina 282

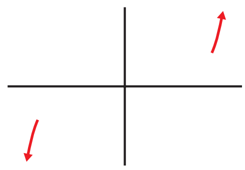
4. Troba les branques infinites de:

a) $y = 3x^5 - 20x^3$ **b)** $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 1}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ **e)** $y = \ln(x^2 + 1)$ **f)** $y = 2^{x-1}$

a) $y = 3x^5 - 20x^3$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



Branques parabòliques

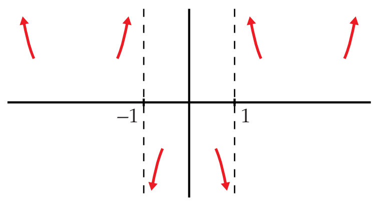
b) $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 1}$

- *Domini* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

Branques parabòliques

- $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

Asímptotes verticals: $x = -1$; $x = 1$



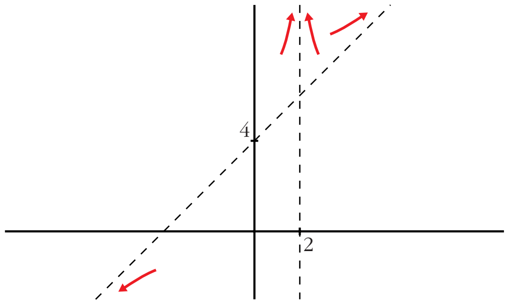
c) $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2} = \dfrac{x^3}{x^2 - 4x + 4} = x + 4 + \dfrac{12x - 16}{x^2 - 4x + 4}$

- *Domini* = $\mathbb{R} - \{2\}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$y = x + 4$ és una asímptota obliqua.

$$f(x) - (x + 4) = \frac{12x - 16}{x^2 - 4x + 4} \quad \to \quad \begin{cases} f(x) - (x+4) > 0 & \text{si } x \to +\infty \\ f(x) - (x+4) < 0 & \text{si } x \to -\infty \end{cases}$$

- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ $x = 2$ és asímptota vertical



d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

- *Domini* = $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} = -1 \;\to\; \text{Hi ha asímptota obliqua.}$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to -\infty} \left[\sqrt{x^2 - 2x} + x\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 2x} - x\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}{(\sqrt{x^2 + 2x} + x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \frac{2}{2} = 1$$

$y = -x + 1$ és una asímptota obliqua quan $x \to -\infty$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} = 1 \;\to\; \text{Hi ha asímptota obliqua.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - 2x} - x\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x} - x)(\sqrt{x^2 - 2x} + x)}{(\sqrt{x^2 - 2x} + x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = -1$$

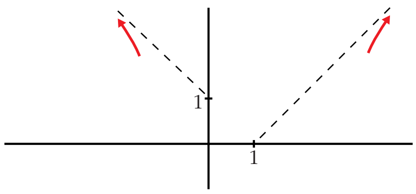
$y = x - 1$ és una asímptota obliqua quan $x \to +\infty$.

- No hi ha asímptotes verticals.

- Posició de la corba respecte a les asímptotes:

  $f(x) - (-x + 1) < 0$ si $x \to -\infty$

  $f(x) - (x - 1) < 0$ si $x \to +\infty$



e) $y = ln(x^2 + 1)$

- *Domini* = $\mathbb{R}$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

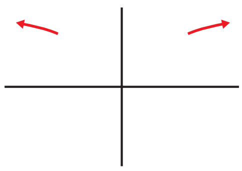
  $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{ln(x^2+1)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x^2+1} = 0$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln(x^2+1)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x^2+1} = 0$

  Branques parabòliques

- No hi ha asímptotes verticals.



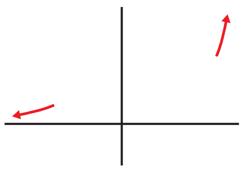
f) $y = 2^{x-1} > 0$ per a tot x.

- *Domini* = $\mathbb{R}$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \quad \to \quad y = 0$ és asímptota horitzontal quan $x \to -\infty$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

- No hi ha asímptotes verticals.



Pàgina 283

5. Troba els punts singulars i els punts d'inflexió de:

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ **b)** $y = ln(x^2 + 1)$

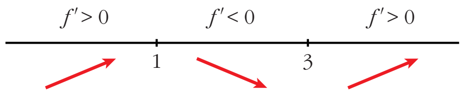
a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$. *Domini* = $\mathbb{R}$

- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

• $f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 3(x^2 - 4x + 3) = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signe de $f'(x)$:

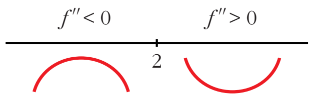


Hi ha un màxim en $(1, 9)$ i un mínim en $(3, 5)$.

• $f''(x) = 6x - 12$

$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 6x - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2$

Signe de $f''(x)$:



Hi ha un punt d'inflexió en $(2, 7)$.

b) $y = ln(x^2 + 1)$. *Domini* = $\mathbb{R}$

• $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

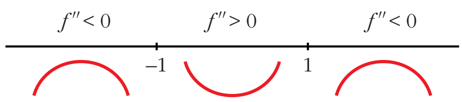
$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$

$\left.\begin{array}{l} f''(x) < 0 \text{ per a } x < 0 \\ f''(x) > 0 \text{ per a } x > 0 \end{array}\right\}$ Hi ha un mínim en $(0, 0)$.

• $f''(x) = \dfrac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$

$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad -2x^2 + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 1 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Signe de $f''(x)$:



Hi ha un punt d'inflexió en $(-1, ln\ 2)$ i un altre en $(1, ln\ 2)$.

6. Troba els punts singulars de:

a) $y = 3x^5 - 20x^3$

b) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

c) $y = \dfrac{x^3}{(x - 2)^2}$

d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

a) $y = 3x^5 - 20x^3$. *Domini* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 15x^4 - 60x^2$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 15x^2(x^2-4) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signe de $f'(x)$:

$f' > 0$	-2	$f' < 0$	0	$f' < 0$	2	$f' > 0$
↗		↘		↘		↗

Hi ha un màxim en $(-2, 64)$, un mínim en $(2, -64)$, i un punt d'inflexió en $(0, 0)$.

b) $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$. *Domini* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$$

Signe de $f'(x)$:

$f' > 0$	-1	$f' > 0$	0	$f' < 0$	1	$f' < 0$
↗		↗		↘		↘

Hi ha un màxim en $(0, 0)$.

c) $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$. *Domini* = $\mathbb{R} - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-2)^2 - x^3 \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{3x^2(x-2) - 2x^3}{(x-2)^3} =$$

$$= \frac{3x^3 - 6x^2 - 2x^3}{(x-2)^3} = \frac{x^3 - 6x^2}{(x-2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(x-6) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

Signe de $f'(x)$:

$f' > 0$	0	$f' > 0$	2	$f' < 0$	6	$f' > 0$
↗		↗		↘		↗

Hi ha un punt d'inflexió en $(0, 0)$ i un mínim en $\left(6, \dfrac{27}{2}\right)$.

d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$. *Domini* = $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x - 1 = 0 \;\rightarrow\; x = 1 \notin \textit{Domini}.$$

No hi ha punts singulars.

Pàgina 285

7. **Representa aquestes funcions:**

a) $y = x^4 - 8x^2 + 7$ **b)** $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2$ **c)** $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$

a) $y = x^4 - 8x^2 + 7$

- **Simetries:**

  $f(-x) = x^4 - 8x^2 + 7 = f(x)$. És parell: simètrica respecte a l'eix Y.

- **Branques infinites:**

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Punts singulars:**

  $f'(x) = 4x^3 - 16x$

  $$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 4x(x^2 - 4) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{array} \right.$$

  Punts singulars: $(0, 7)$; $(-2, -9)$; $(2, -9)$

- **Talls amb els eixos:**

  – Amb l'eix Y $\rightarrow$ $x = 0$ $\rightarrow$ $y = 7$ $\rightarrow$ Punt $(0, 7)$

  – Amb l'eix X $\rightarrow$ $y = 0$ $\rightarrow$ $x^4 - 8x^2 + 7 = 0$

  $$x^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} \left\langle \begin{array}{l} x^2 = 7 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{7} \\ x^2 = 1 \;\rightarrow\; x = \pm 1 \end{array} \right.$$

  Punts: $\left(-\sqrt{7}, 0\right)$; $(-1, 0)$; $(1, 0)$; $\left(\sqrt{7}, 0\right)$

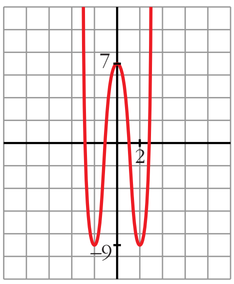
- **Punts d'inflexió:**

  $f''(x) = 12x^2 - 16$

  $$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 12x^2 - 16 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = \frac{4}{3} \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

  Punts $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{-17}{9}\right)$ i $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{-17}{9}\right)$

- **Gràfica:**



b) $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2$

- **Simetries:**

$f(-x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2$. No és parell ni senar: no és simètrica respecte a l'eix Y ni respecte a l'origen de coordenades.

- **Branques infinites:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Punts singulars:**

$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 72x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 12x(x^2 + x - 6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases} \end{cases}$

Punts: (0, 0); (2, –64); (–3, –189)

- **Talls amb els eixos:**

– Amb l'eix $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punt (0, 0)

– Amb l'eix $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2(3x^2 + 4x - 36) = 0$

$\begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 + 432}}{6} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{448}}{6} \begin{cases} x \approx 2{,}86 \\ x \approx -4{,}19 \end{cases} \end{cases}$

Punts: (0, 0); (2,86; 0); (–4,19; 0)

- **Punts d'inflexió:**

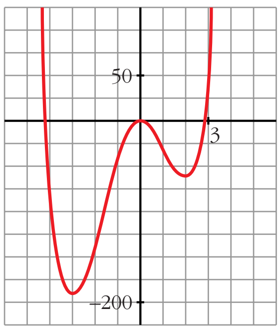
$f''(x) = 36x^2 + 24x - 72$

$f''(x) = 0 \rightarrow 12(3x^2 + 2x - 6) = 0$

$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 72}}{6} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{76}}{6} \begin{cases} x \approx 1{,}12 \\ x \approx -1{,}79 \end{cases}$

Punts: (1,12; –34,82) i (–1,79; –107,22)

- **Gràfica:**



c) $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$

- **Simetries:**

$f(-x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$. No és parell ni senar: no és simètrica respecte a l'eix Y ni respecte a l'origen de coordenades.

- **Branques infinites:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Punts singulars:**

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12$

$f'(x) = 0 \rightarrow 4(x^3 - 3x^2 - x + 3) = 0 \rightarrow 4(x-1)(x+1)(x-3) = 0$

$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right\}$ Punts $(1, 7)$; $(-1, -9)$; $(3, -9)$

- **Talls amb els eixos:**

– Amb l'eix Y $\rightarrow$ $x = 0$ $\rightarrow$ $y = 0$ $\rightarrow$ Punt $(0, 0)$

– Amb l'eix X $\rightarrow$ $y = 0$ $\rightarrow$ $x(x^3 - 4x^2 - 2x + 12) = 0$

$x = 0$

$x^3 - 4x^2 - 2x + 12 = 0 \rightarrow (x-2)(x^2 - 2x - 6) = 0$ $\begin{array}{l} x = 2 \\ x \approx 3{,}65 \\ x \approx -1{,}65 \end{array}$

Punts: $(0, 0)$; $(2, 0)$; $(3{,}65; 0)$; $(-1{,}65; 0)$

- **Punts d'inflexió:**

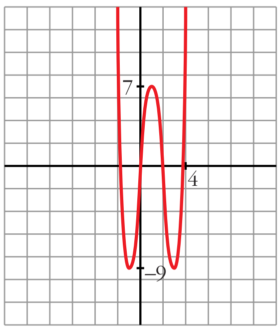
$f''(x) = 12x^2 - 24x - 4$

$f''(x) = 0 \rightarrow 4(3x^2 - 6x - 1) = 0$

$x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 + 12}}{6} = \dfrac{6 \pm \sqrt{48}}{6}$ $\begin{array}{l} x \approx 2{,}15 \\ x \approx -0{,}15 \end{array}$

Punts: $(2{,}15; -1{,}83)$ i $(-0{,}15; -1{,}74)$

- **Gràfica:**



8. Representa les funcions següents:

a) $y = 3x^4 - 4x^3 - 16$ **b)** $y = x^3 - 3x$ **c)** $y = (1/4)x^4 - 2x^2$

a) $y = 3x^4 - 4x^3 - 16$

- **Simetries:**

  $f(-x) = 3x^4 + 4x^3 - 16$. No és parell ni senar: no és simètrica respecte a l'eix Y ni respecte a l'origen de coordenades.

- **Branques infinites:**

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Punts singulars:**

  $f'(x) = 12x^3 - 12x^2$

  $f'(x) = 0 \rightarrow 12x^2(x - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

  Punts: (0, –16); (1, –17)

- **Talls amb els eixos:**

  – Amb l'eix Y $\rightarrow$ $x = 0$ $\rightarrow$ $y = -16$ $\rightarrow$ Punt (0, –16)

  – Amb l'eix X $\rightarrow$ $y = 0$ $\rightarrow$ $3x^4 - 4x^3 - 16 = 0$ $\rightarrow$

  $\begin{cases} x = 2 \\ 3x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0 \end{cases}$ $\rightarrow$ té una sola arrel, situada entre –2 i –1; ja que, si $g(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4x + 8$, $g(-2) = -16 < 0$ i $g(-1) = 3 > 0$.

  Punts (2, 0) i (k, 0), amb k entre –2 i –1.

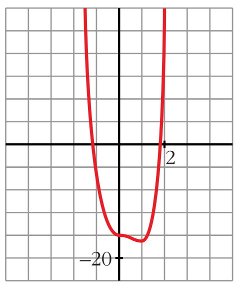
- **Punts d'inflexió:**

  $f''(x) = 36x^2 - 24x$

  $f''(x) = 0 \rightarrow 12x(3x - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

  Punts: (0, –16) i $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{-448}{27}\right)$

- **Gràfica:**



b) $y = x^3 - 3x$

- **Simetries:**

$f(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$. És senar: simètrica respecte a l'origen de coordenades.

- **Branques infinites:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Punts singulars:**

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Punts: (–1, 2); (1, –2)

- **Talls amb els eixos:**

– Amb l'eix $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punt (0, 0)

– Amb l'eix $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^3 - 3x = 0 \rightarrow x(x^2 - 3) = 0$

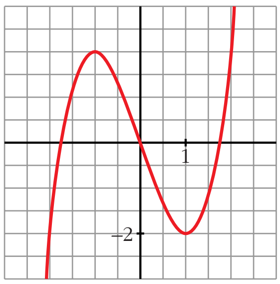
$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{array}\right\}$ Punts: $(0, 0); \left(-\sqrt{3}, 0\right); \left(\sqrt{3}, 0\right)$

- **Punts d'inflexió:**

$f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Punt (0, 0)

- **Gràfica:**



c) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

- **Simetries:**

$f(-x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 = f(x)$. És parell: simètrica respecte a l'eix Y.

- **Branques infinites:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Punts singulars:**

$f'(x) = x^3 - 4x$

$$f'(x) = 0 \;\to\; x(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Punts: (0, 0); (–2, –4); (2, –4)

- **Talls amb els eixos:**

– Amb l'eix $Y \to x = 0 \to y = 0 \to$ Punt (0, 0)

– Amb l'eix $X \to y = 0 \to x^2\left(\frac{1}{4}x^2 - 2\right) = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 8 \begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ x = 2\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

Punts: $(0, 0)$; $\left(-2\sqrt{2}, 0\right)$; $\left(2\sqrt{2}, 0\right)$

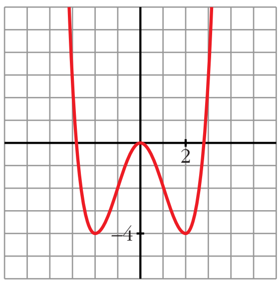
- **Punts d'inflexió:**

$f''(x) = 3x^2 - 4$

$$f''(x) = 0 \;\to\; 3x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = -\sqrt{\dfrac{4}{3}} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ x = \sqrt{\dfrac{4}{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Punts: $\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{20}{9}\right)$; $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{20}{9}\right)$

- **Gràfica:**



Pàgina 287

9. **Representa:**

a) $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x}$

a) $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2} = -x + \dfrac{x}{1 - x^2}$. *Domini* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- **Simetries:**

$f(-x) = \dfrac{-x^3}{1 - x^2} = -f(x)$. És senar: simètrica respecte a l'origen de coordenades.

- **Asímptotes verticals:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{Asímptota vertical en } x = -1.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{Asímptota vertical en } x = 1.$$

- **Asímptota obliqua:**

$\dfrac{x^3}{1 - x^2} = -x + \dfrac{x}{1 - x^2} \quad \to \quad y = -x$ és asímptota obliqua.

Posició de la corba respecte a l'asímptota:

$f(x) - (-x) > 0$ si $x \to -\infty$ (corba per sobre)

$f(x) - (-x) < 0$ si $x \to +\infty$ (corba per sota)

- **Punts singulars:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(1 - x^2) - x^3 \cdot (-2x)}{(1 - x^2)^2} = \frac{3x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(1 - x^2)^2} = \frac{-x^4 + 3x^2}{(1 - x^2)^2}$$

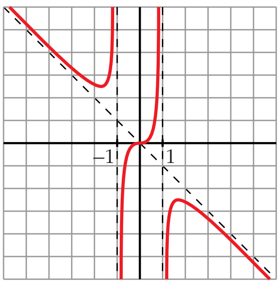
$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2(-x^2 + 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

Punts: $(0, 0)$; $\left(-\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

- **Talls els eixos:**

Talla els eixos en $(0, 0)$.

- **Gràfica:**



b) $y = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x} = x - 2 - \dfrac{8}{x}$. *Domini* = $\mathbb{R} - \{0\}$

- **Simetries:**

$f(-x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{-x}$. No és parell ni senar: no és simètrica respecte a l'eix Y ni respecte a l'origen.

- **Asímptotes verticals:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{Asímptota vertical en } x = 0.$$

- **Asímptota obliqua:**

$\dfrac{x^2 - 2x - 8}{x} = x - 2 - \dfrac{8}{x} \quad \to \quad y = x - 2$ és asímptota obliqua.

Posició de la corba respecte a l'asímptota:

$f(x) - (x - 2) > 0$ si $x \to -\infty$ (corba per sobre)

$f(x) - (x - 2) < 0$ si $x \to +\infty$ (corba per sota)

- **Punts singulars:**

$f'(x) = 1 + \dfrac{8}{x^2} > 0$ per a tot x del domini.

La funció és creixent en tot el seu domini. No té punts singulars.

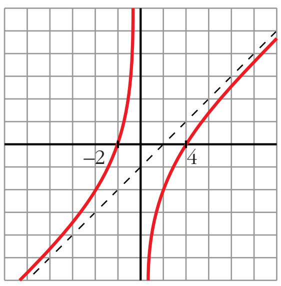
- **Talls amb els eixos:**

– Amb l'eix $X \to y = 0 \to x^2 - 2x - 8 = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \end{cases}$

Punts: $(-2, 0)$ i $(4, 0)$

– No talla l'eix Y, ja que no està definida en $x = 0$.

- **Gràfica:**



10. Representa:

a) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$ b) $y = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$

a) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$. *Domini* = $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- **Simetries:**

$f(-x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = f(x)$. És parell: simètrica respecte a l'eix Y.

- **Asímptotes verticals:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{ Asímptota vertical en } x = -2.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{ Asímptota vertical en } x = 2.$$

- **Asímptota horitzontal:**

$\dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = 1 - \dfrac{5}{x^2 - 4} \;\to\; y = 1$ és asímptota horitzontal.

Posició de la corba respecte a l'asímptota:

$f(x) - 1 < 0$ si $x \to -\infty$ (corba per sota)

$f(x) - 1 < 0$ si $x \to +\infty$ (corba per sota)

- **Punts singulars:**

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2 - 9)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x(x^2 - 4 - x^2 + 9)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{10x}{(x^2 - 4)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\to\; 10x = 0 \;\to\; x = 0 \;\to$ Punt $\left(0, \dfrac{9}{4}\right)$

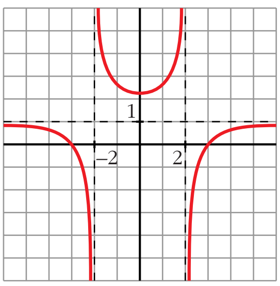
- **Talls amb els eixos:**

– Amb l'eix $Y \;\to\; x = 0 \;\to\; y = \dfrac{9}{4} \;\to$ Punt $\left(0, \dfrac{9}{4}\right)$

– Amb l'eix $X \;\to\; y = 0 \;\to\; x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$

Punts: $(-3, 0)$ i $(3, 0)$.

- **Gràfica:**



b) $y = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$. *Domini* = $\mathbb{R}$

- **Simetries:**

$f(-x) = \dfrac{-x^3 - 2x}{x^2 + 1} = -f(x)$. És senar: simètrica respecte a l'origen de coordenades.

- **No té asímptotes verticals.**

- **Asímptota obliqua:**

$\dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} = x + \dfrac{x}{x^2 + 1} \quad \to \quad y = x$ és asímptota obliqua.

Posició de la corba respecte a l'asímptota:

$f(x) - x < 0$ si $x \to -\infty$ (corba per sota)

$f(x) - x > 0$ si $x \to +\infty$ (corba per sobre)

- **Punts singulars:**

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 2)(x^2 + 1) - (x^3 + 2x) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 + 2x^2 + 2 - 2x^4 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{x^4 + x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^4 + x^2 + 2 = 0 \quad \to \quad x^2 = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2} \quad \to$ No té solució.

No hi ha punts singulars.

- **Talls amb els eixos:**

– Amb l'eix $Y \quad \to \quad x = 0 \quad \to \quad y = 0 \quad \to$ Punt $(0, 0)$

– Amb l'eix $X \quad \to \quad y = 0 \quad \to \quad x^3 + 2x = 0 \quad \to \quad x(x^2 + 2) = 0 \quad \to$

$\to \quad x = 0 \quad \to$ Punt $(0, 0)$

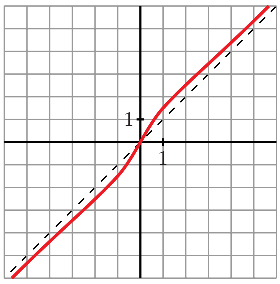
- **Punts d'inflexió:**

$$f''(x) = \frac{(4x^3 + 2x)(x^2 + 1)^2 - (x^4 + x^2 + 2) \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3 + 2x)(x^2 + 1) - 4x(x^4 + x^2 + 2)}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$$

$f''(x) = 0 \; \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$ Punts: $(0, 0)$; $\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{5\sqrt{3}}{4}\right)$; $\left(\sqrt{3}, \dfrac{5\sqrt{3}}{4}\right)$

• **Gràfica:**



Pàgina 289

11. **Representa:**

a) $y = \sqrt{x^2 + 2x}$ **b)** $y = \sqrt{x^2 - 9}$

a) $y = \sqrt{x^2 + 2x}$

• **Domini:**

$x^2 + 2x = 0 \;\rightarrow\; x(x + 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

$D = (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$

• **Simetries:**

$f(-x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. No és parell ni senar: no és simètrica respecte a l'eix Y ni respecte a l'origen de coordenades.

• **No té asímptotes verticals.**

• **Asímptotes obliqües:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{-x} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to -\infty} [\sqrt{x^2 + 2x} + x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 - 2x} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x} - x)(\sqrt{x^2 - 2x} + x)}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} =$$

$$= \frac{-2}{1 + 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$y = -x - 1$ és asímptota obliqua quan $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 + 2x} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} =$$

$$= \frac{2}{1 + 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$y = x + 1$ és asímptota obliqua quan $x \to +\infty$.

- **Punts singulars:**

$$f'(x) = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$$

$f'(x) = 0 \;\to\; x + 1 = 0 \;\to\; x = -1 \;\to\;$ Com que no pertany al domini de $f(x)$, no hi ha punts singulars.

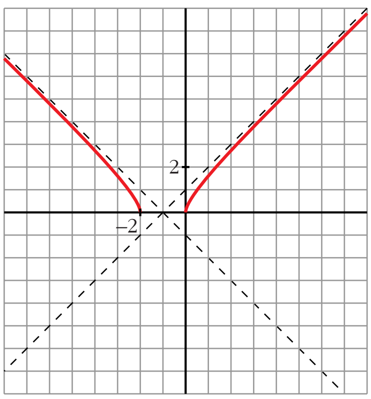
- **Talls amb els eixos:**

– Amb l'eix $X \;\to\; y = 0 \;\to\; \sqrt{x^2 + 2x} \;\to\; x^2 + 2x = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array} \right.$

Punts: $(0, 0)$ i $(-2, 0)$

– Amb l'eix $Y \;\to\; x = 0 \;\to\; y = 0 \;\to\;$ Punt: $(0, 0)$

- **Gràfica:**



b) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

- **Domini:**

$$x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$$

$D = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

- **Simetries:**

$f(-x) = \sqrt{x^2 - 9} = f(x)$. És parell: simètrica respecte a l'eix Y.

- **No té asímptotes verticals.**

- **Asímptotes obliqües:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{-x} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to -\infty} [\sqrt{x^2 - 9} + x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 - 9} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 9} - x)(\sqrt{x^2 - 9} + x)}{(\sqrt{x^2 - 9} + x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 9 - x^2}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = 0$$

$y = -x$ és asímptota obliqua quan $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 - 9} - x] = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 9} - x)(\sqrt{x^2 - 9} + x)}{(\sqrt{x^2 - 9} + x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 9 - x^2}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = 0$$

$y = x$ és asímptota obliqua quan $x \to +\infty$.

- **Punts singulars:**

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

$f'(x) = 0 \;\to\; x = 0$. Com que no pertany al domini de $f(x)$, no hi ha punts singulars.

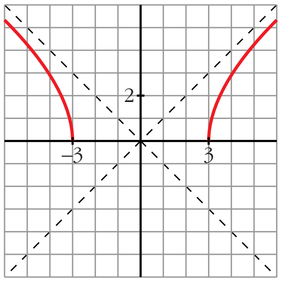
- **Talls amb els eixos:**

  – Amb l'eix X $\rightarrow$ $y = 0$ $\rightarrow$ $\sqrt{x^2 - 9}$ $\rightarrow$ $x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$

  Punts: $(-3, 0)$ i $(3, 0)$

  – No talla a l'eix Y, ja que no existeix $f(0)$.

- **Gràfica:**



12. **Representa:**

a) $y = ln\,(x^2 + 4)$ **b)** $y = ln\,(x^2 - 1)$

a) $y = ln\,(x^2 + 4)$

- **Domini:**

  Com que $x^2 + 4 > 0$ per a tot x, $D = \mathbb{R}$.

- **Simetries:**

  $f(-x) = ln\,(x^2 + 4) = f(x)$. És parell: simètrica respecte a l'eix Y.

- **No té asímptotes verticals.**

- **Branques infinites:**

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ln\,(x^2 + 4)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2 + 4}}{1} = 0$$

  Per tant, no té asímptotes de cap tipus.

  Té branques parabòliques.

- **Punts singulars:**

  $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 4}$

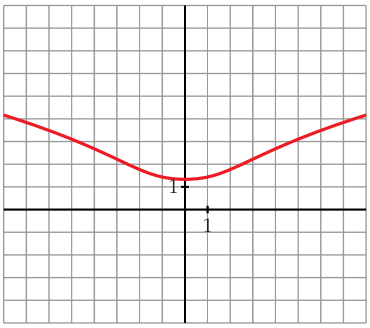
  $f'(x) = 0$ $\rightarrow$ $2x = 0$ $\rightarrow$ $x = 0$ $\rightarrow$ Punt $(0, ln\,4)$

- **Punts d'inflexió:**

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 4) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{2x^2 + 8 - 4x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{8 - 2x^2}{(x^2 + 4)^2}$$

$$f''(x) = 0 \quad \to \quad 8 - 2x^2 = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases} \Bigg\} \text{ Punts: } (-2,\ ln\, 8) \text{ i } (2,\ ln\, 8)$$

- **Gràfica:**



b) $y = ln\,(x^2 - 1)$

- **Domini:**

$x^2 - 1 > 0 \quad \to \quad D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

- **Simetries:**

$f(-x) = ln\,(x^2 - 1) = f(x)$. És parell: simètrica respecte a l'eix Y.

- **Asímptotes verticals:**

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

$x = -1$ i $x = 1$ són asímptotes verticals.

- **Branques infinites:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ln\,(x^2 - 1)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2 - 1}}{1} = 0$$

Té branques parabòliques.

- **Punts singulars:**

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x = 0 \quad \to \quad x = 0$. No té punts singulars, ja que la funció no està definda en $x = 0$.

• **Punts d'inflexió:**

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2 - 4x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2}$$

No té punts d'inflexió.

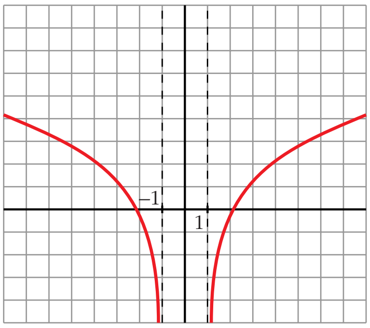
• **Punts de tall amb els eixos:**

– Amb l'eix $X \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; ln\,(x^2 - 1) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 1 = 1$

$$x^2 = 2 \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases} \quad \text{Punts: } \left(-\sqrt{2},\, 0\right) \text{ i } \left(\sqrt{2},\, 0\right)$$

– No talla l'eix Y, ja que no existeix $f(0)$.

• **Gràfica:**



Pàgina 290

13. Representa: **a)** $y = \dfrac{e^x}{x^2}$ **b)** $y = \dfrac{e^{-x}}{-x}$ **c)** $y = \dfrac{1}{2} \cos 2x + \cos x$

a) $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

• **Domini:** $D = \mathbb{R} - \{0\}$

• **No és simètrica.**

• **Asímptotes verticals:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{Asímptota vertical: } x = 0$$

• **Branques infinites:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. A més $f(x) > 0$ per a tot x del domini.

$y = 0$ és una asímptota horitzontal quan $x \to -\infty$

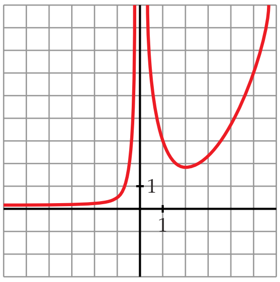
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. Branca parabòlica.

- **Punts singulars:**

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x \cdot e^x(x-2)}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2 \quad \rightarrow \quad \text{Punt } \left(2,\ \frac{e^2}{4}\right)$$

- **Gràfica:**



b) $y = \dfrac{e^{-x}}{-x}$

- **Domini** $\mathbb{R} - \{0\}$.
- **Asímptota vertical** en $x = 0$: $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \quad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.
- **Branca** infinita quan $x \rightarrow -\infty$.

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ És una branca parabòlica.

  Branca infinita quan $x \rightarrow \infty$.

  $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ prenent valors negatius.

  $y = 0$ és una asímptota horitzontal quan $x \rightarrow \infty$. La corba queda per sota.
- **No té simetria.**
- **No talla els eixos.**

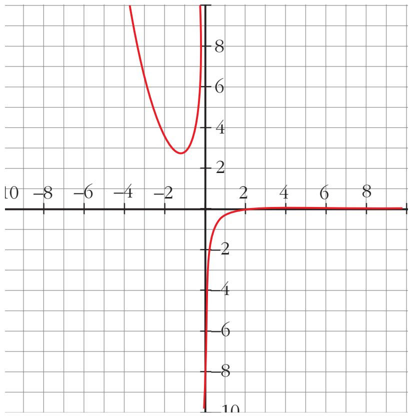
  $f'(x) = \dfrac{(x+1) \cdot e^{-x}}{x^2}$.

  $f'(x) = 0 \quad (x+1)e^{-x} = 0 \quad x + 1 = 0 \quad x = -1 \quad f(-1) = e.$
- **Punt singular:** $(-1, e)$.
- **Creixement** $f'(x) > 0$.

  $\dfrac{(x+1)e^{-x}}{x^2} > 0 \quad (x+1) > 0 \quad x > -1 \quad f(x)$ creix $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

  $f(x)$ decreix $(-\infty, -1)$.

• **Gràfica:** $y = \dfrac{e^{-x}}{x}$



c) $y = \dfrac{1}{2} \cos 2x + \cos x$

• El període de $\cos x$ és 2π i el de $\sin 2x$ és π. Per tant, la funció és periòdica de període 2π. L'estudiem tan sols en aquest interval.

• És **derivable** en tot $\mathbb{R}$ (és suma de funcions derivables).

• **Punts singulars:**

$f'(x) = -\sin 2x - \sin x = -2\sin x \cos x - \sin x = -\sin x\,(2\cos x + 1)$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -\sin x(2\cos x + 1) = 0 \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\sin x = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punt } \left(0, \dfrac{3}{2}\right) \\ x = \pi \;\rightarrow\; \text{Punt } \left(\pi, -\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\cos x = -\dfrac{1}{2} \begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{3} \;\rightarrow\; \text{Punt } \left(\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{3}{4}\right) \\ x = \dfrac{4\pi}{3} \;\rightarrow\; \text{Punt } \left(\dfrac{4\pi}{3}, -\dfrac{3}{4}\right) \end{cases}$$

• **Punts de tall amb els eixos:**

– Amb l'eix Y $\rightarrow$ $x = 0$ $\rightarrow$ $y = \dfrac{3}{2}$ $\rightarrow$ Punt $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$

– Amb l'eix X $\rightarrow$ $y = 0$ $\rightarrow$ $\cos 2x + 2\cos x = 0$

$\cos^2 x - \sin^2 x + 2\cos x = 0$

$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + 2\cos x = 0$

$\cos^2 x - 1 + \cos^2 x + 2\cos x = 0$

$2\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$

$$cos\ x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4} \begin{cases} cos\ x = 0{,}366 \\ cos\ x = -1{,}366 \text{ (no val)} \end{cases}$$

$$cos\ x = 0{,}366 \begin{cases} x = 1{,}2 \\ x = 5{,}09 \end{cases}$$

Punts: (1,2; 0); (5,09; 0)

- **Punts d'inflexió:**

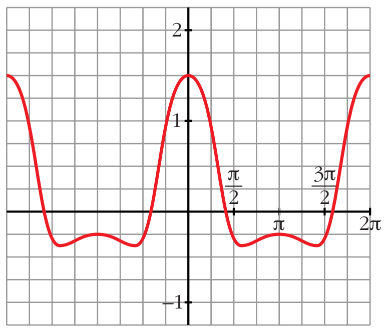
$f''(x) = -2cos\ 2x - cos\ x$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; \begin{aligned} &-2cos\ 2x - cos\ x = 0 \\ &-2(cos^2\ x - sin^2\ x) - cos\ x = 0 \\ &-2cos^2\ x + 2sin^2\ x - cos\ x = 0 \\ &-2cos^2\ x + 2(1 - cos^2\ x) - cos\ x = 0 \\ &-2cos^2\ x + 2 - 2cos^2\ x - cos\ x = 0 \\ &-4cos^2\ x - cos\ x + 2 = 0 \end{aligned}$$

$$cos\ x = \frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{-8} \begin{cases} cos\ x = -0{,}843 \\ cos\ x = 0{,}593 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} cos\ x = -0{,}843 &\begin{cases} x = 2{,}57 \\ x = 3{,}71 \end{cases} \\ cos\ x = 0{,}593 &\begin{cases} x = 0{,}94 \\ x = 5{,}35 \end{cases} \end{aligned}\right\} \quad \text{Punts:} \quad \begin{aligned} &(2{,}57; -0{,}63) \\ &(3{,}71; -0{,}63) \\ &(0{,}94; 0{,}44) \\ &(5{,}35; 0{,}45) \end{aligned}$$

- **Gràfica:**



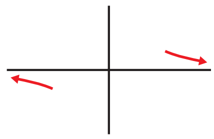
Pàgina 291

14. Quin tipus de branques en l'infinit tenen?

a) $y = \frac{1}{x+1}$ **b)** $y = \frac{3x}{x+1}$ **c)** $y = \frac{x^2}{x+1}$ **d)** $y = \frac{x^4}{x+1}$

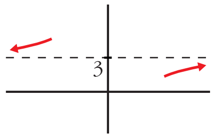
a) $y = \frac{1}{x+1}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \;\rightarrow\;$ Asímptota horitzontal: $y = 0$



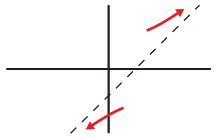
b) $y = \dfrac{3x}{x+1}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3 \;\rightarrow\;$ Asímptota horitzontal: $y = 3$



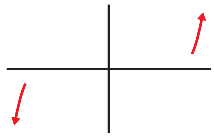
c) $y = \dfrac{x^2}{x+1} = x - 1 + \dfrac{1}{x+1} \;\rightarrow$

$\rightarrow$ Asímptota obliqua: $y = x - 1$



d) $y = \dfrac{x^4}{x+1}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty;\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty;\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \end{array}\right\} \text{Branques parabòliques}$$



15. Quin tipus de branques en l'infinit tenen?

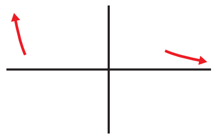
a) $y = \dfrac{x^2}{e^x}$ **b)** $y = \sqrt[3]{x^2 + 3}$ **c)** $y = x + \sqrt{x}$

d) $y = \operatorname{tg} x$ **e)** $y = x \sin x$ **f)** $y = x - \cos x$

a) $y = \dfrac{x^2}{e^x}$

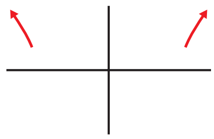
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty;\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty.$ Branca parabòlica.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0.$ Asímptota horitzontal: $y = 0$



b) $y = \sqrt[3]{x^2 + 3}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty;\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty;\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{Branques parabòliques}$$

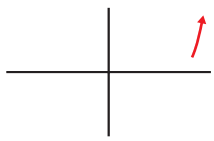


c) $y = x + \sqrt{x}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ no existeix, ja que només està definida en $[0, +\infty)$.

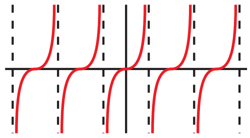
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty;\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{\sqrt{x}}{x}\right) = 1 = m$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$



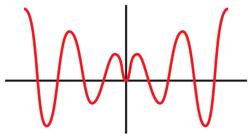
d) $y = tg\, x$

No existeixen $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ni $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.



e) $y = x \sin x$

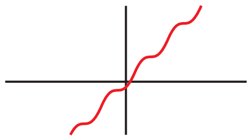
No existeixen $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ni $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.



f) $y = x - \cos x$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x - \cos x}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 + \sin x}{1} \text{ no existeix}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - \cos x}{x} \text{ no existeix}$$



Pàgina 293

16. Representa:

a) $y = x - |x - 3| + |x + 1|$ **b)** $y = \dfrac{x^2 + 3x}{|x| + 1}$ **c)** $|x - 5|\,x$

a) $|x - 3|$ si $x > 3 \;\to\; (x - 3)$.

si $x < 3 \;\to\; (3 - x)$.

$|x + 1|$ si $x < -1 \;\to\; (-x - 1)$.

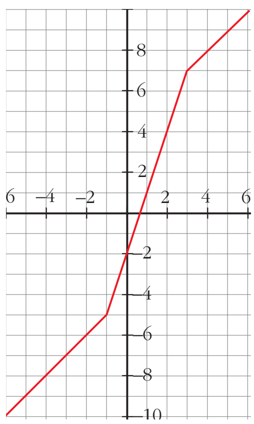
si $x > -1 \;\to\; (x + 1)$.

La funció $y = x - |x - 3| + |x + 1|$ queda com $y = \begin{cases} x - 4 & \text{si } x < -1 \\ 3x - 2 & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ x + 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$.

Són tres trams rectes.

N'avaluem els pendents i les ordenades, en l'origen.

- **Gràfica:**



b) • **Domini** $\mathbb{R}$.

$$y = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3x}{x + 1} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{x^2 + 3x}{1 - x} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

• **No asímptotes verticals.**

• **Branques infinites** quan $x \to \infty$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \quad \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1 \quad \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - 1 \cdot x) = 2.$

Asímptota obliqua en $y = x + 2$ quan $x \to \infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1 \quad \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (-1)x) = -4.$

Asímptota obliqua en $y = -x - 4$ quan $x \to -\infty$.

• **No té simetria.**

• **Talls amb eixos.**

eix $y \to f(0) = 0 \to (0, 0)$.

eix $x \to \dfrac{x^2 + 3x}{2|x| + 1} = 0 \to x^2 + 3x = 0 \to x = 0 \to (0, 0)$.

$x = -3 \to (-3, 0)$.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 1} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{-x^2 + 2x + 3}{x^2 - 2x + 1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

• **Punts singulars.**

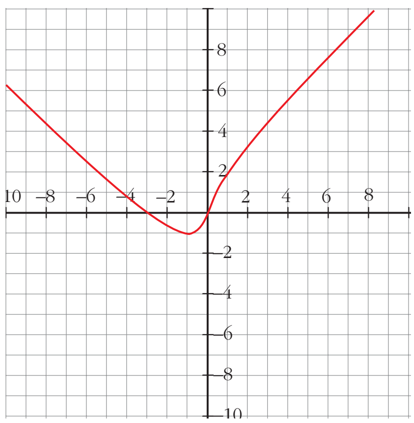
$f'(x) = 0 \quad x = -1 \quad f(-1) = -1 \to (-1, -1)$ mínim.

• **Monotonia** $f'(x) > 0$ i $f'(x) < 0$.

$f(x)$ creix si $x \in (-1, +\infty)$.

$f(x)$ decreix si $x \in (-\infty, -1)$.

• **Gràfica:**



c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x & \text{si } x \geq 5 \\ 5x - x^2 & \text{si } x < 5 \end{cases}$

• **Domini** $\mathbb{R}$.

• **No té asímptotes verticals.**

• **Branca** infinita quan $x \to \infty$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \quad \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$ Branca parabólica quan $x \to \infty$.

Branca infinita quan $x \to -\infty$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ Branca parabólica quan $x \to -\infty$.

• **No simetria.**

• **Talls amb eixos:** eix $y \to (0, 0)$.

eix $y \to (0, 0)$ i $(5, 0)$.

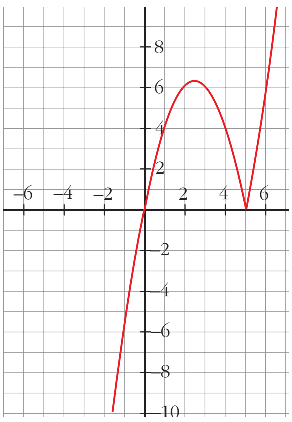
$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x > 5 \\ 5 - 2x & \text{si } x < 5 \end{cases}$ No derivable a $x = 5 \to$ pic.

• **Punts singulars:** $f'(x) = 0 \quad x = 5/2 \quad f(5/2) = \dfrac{25}{4} \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{25}{4}\right)$ màxim.

• **Monotonia:** $f(x)$ creix si $x \in (-\infty, 5/2) \cup (5, +\infty)$.

$f(x)$ decreix si $x \in (5/2, 5)$.

• **Gràfica:**



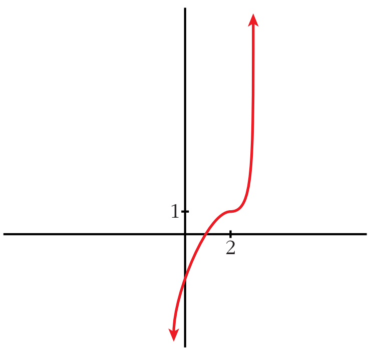
Pàgina 299

EXERCICIS I PROBLEMES PROPOSATS

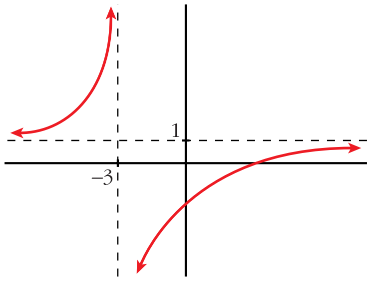
17. **Representa una funció contínua i derivable en $\mathbb{R}$ que compleixi:**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad f'(2) = 0$$

$$f(2) = 1, \; f'(x) \geq 0 \text{ per a qualsevol } x.$$



18. **Representa una funció que no estigui definida en $x = -3$ i que compleixi:**

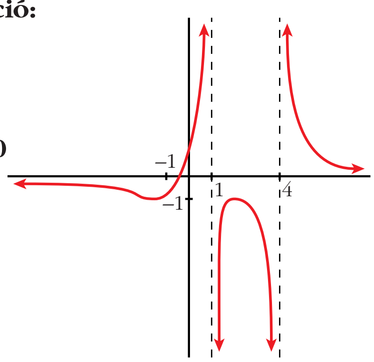


$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1 \begin{cases} \text{si } x \to +\infty, \ f(x) < 1 \\ \text{si } x \to -\infty, \ f(x) > 1 \end{cases}$$

No té punts singulars i és creixent.

19. **D'una funció $y = f(x)$ tenim aquesta informació:**



$D = \mathbb{R} - \{1, 4\}$; $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

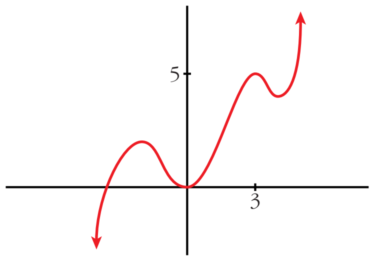
$\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

(si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$; si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$)

$f'(2) = 0$, $f(2) = -1$; $f'(-1) = 0$, $f(-1) = -1$

Representa-la.

20 **Dibuixa la gràfica d'una funció de la qual es coneixen les propietats següents:**



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$f'(x) = 0$ si $x = -2$, $x = 0$, $x = 3$, $x = 4$

$f(-2) = 2$; $f(0) = 0$; $f(3) = 5$; $f(4) = 4$

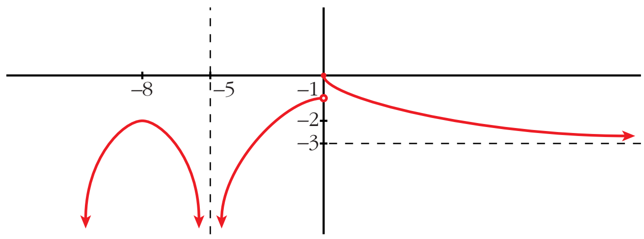
21. **Dibuixa la gràfica d'una funció que compleixi les propietats següents:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -3, \quad \lim_{x \to -5} f(x) = -\infty$$

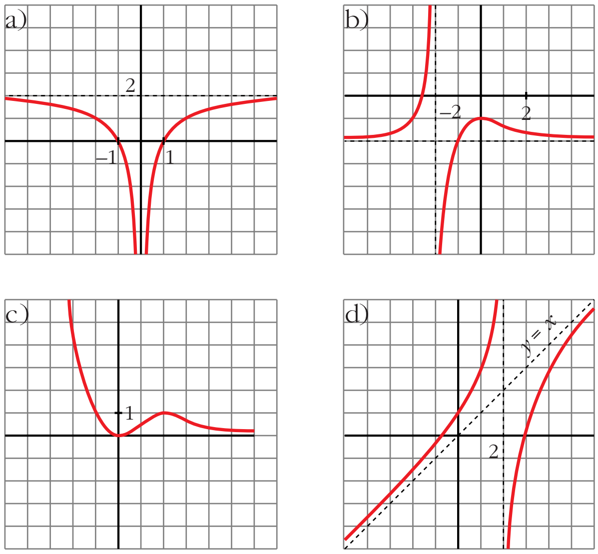
$f(-8) = -2$, $f(0) = 0$ **és l'únic punt on $f(x)$ s'anul·la.**

$f'(-8) = 0$ **i la derivada no s'anul·la en cap altre punt. A més, $f'(x) < 0$ per a tot x positiu.**

La funció és contínua en tota la recta real, excepte en els punts $x = -5$ i $x = 0$.



22. **Descriu les funcions següents indicant-ne les asímptotes i branques infinites, els punts singulars i els intervals de creixement i de decreixement.**



a) • **Asímptota vertical:** $x = 0$. Asímptota horitzontal: $y = 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 2$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 2$)

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

• $f(x)$ no té punts singulars.

• **Decreix** en $(-\infty, 0)$ i creix en $(0, +\infty)$.

b) • **Asímptota vertical:** $x = -2$. **Asímptota horitzontal:** $y = -2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$

(si $x \to -\infty$, $f(x) > -2$; si $x \to +\infty$, $f(x) > -2$)

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

• **Punts singulars:** $f'(0) = 0$; $f(0) = -1$. Màxim en $(0, -1)$

• **Creixent** en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ i decreixent en $(0, +\infty)$.

c) • **Asímptota horitzontal** si $x \to +\infty$: $y = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

- **Punts singulars:**

  $f'(0) = 0$; $f(0) = 0$. Mínim en $(0, 0)$

  $f'(2) = 0$; $f(2) = 1$. Màxim en $(2, 1)$

- **Decreixent** en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ i creixent en $(0, 2)$.

d) • **Asímptota vertical:** $x = 2$

Asímptota obliqua: $y = x$

(si $x \to -\infty$, $f(x) > x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < x$)

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

- **Punts singulars:** no en té.
- **Creixent** en $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

23. **Estudia i representa les funcions:**

a) $y = x^3 + 3x^2$ **b)** $y = x^3 - 3x^2 + 5$ **c)** $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{9}{2}x^2 + 10$

d) $y = \dfrac{5x^4 - x^5}{64}$ **e)** $y = x^5 - 5x^3$ **f)** $y = (x - 1)^3 - 3x$

Totes són funcions polinòmiques.

a) • **No té simetria.**

- **Branca** infinita quan $x \to \infty$.

  $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ Branca parabòlica.

  Branca infinita quan $x \to -\infty$.

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ Branca parabòlica.

- **Punts singulars.**

  Talls amb eixos $(-3, 0)$ i $(0, 0)$.

  $f'(x) = 0 \quad 3x^2 + 6x = 0 \to x = 0 \to f(0) = 0$ $(0, 0)$ mínim.

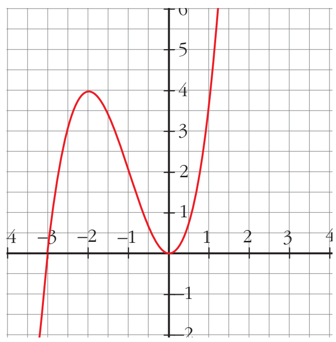
  $x = -2 \to f(-2) = 4$ $(-2, 4)$ màxim.

- **Monotonia** $f(x)$ creix si $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$.

  $f(x)$ decreix si $x \in (-2, 4)$.

- $f''(x) = 6x + 6$ $f''(x) = 0 \to x = -1$ $f(-1) = 2$ $(-1, 2)$ punt d'inflexió.

• **Gràfica:**



b) • **No té simetria.**

• **Branca** infinita quan $x \to \infty$.

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ Branca parabòlica.

Branca infinita quan $x \to -\infty$.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ Branca parabòlica.

• **Punts singulars.**

Talls amb eixos (–1, 0) i (0, 5).

$f'(x) = 0 \quad x = 0 \to f(0) = 5 \to (0, 5)$ màxim.

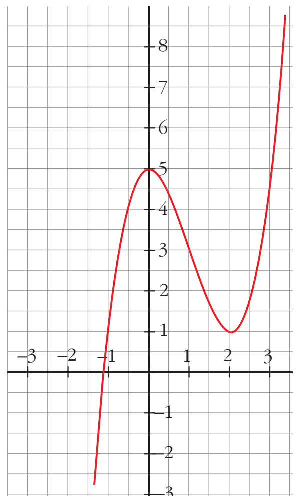
$\quad\quad\quad\quad x = 2 \to f(2) = 1 \to (2, 1)$ mínim.

• **Monotonia** $f(x)$ creix si $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

$f(x)$ decreix si $x \in (0, 2)$.

• $f''(x) = 0 \quad x = 1 \quad f(1) = 3 \quad (1, 3)$ punt d'inflexió.

• **Gràfica:**



c) • **Té simetria parell.**

• **Branca infinita** quan $x \rightarrow \infty$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ Branca parabòlica.

Branca infinita quan $x \rightarrow -\infty$ igual que $x \rightarrow \infty$ ja que simetria parell.

• **Punts singulars.**

Tall amb eixos (–3,925, 0) (–1,612, 0) (1,612, 0) (3,925, 0) (0, 10).

$f'(x) = 0$ $x^3 - f(x) = 0$ $x = -3$ $f(-3) = -10$ (–3, –10) mínim.

$x = 0$ $f(0) = 10$ (0, 10) màxim.

$x = 3$ $f(3) = -10$ (3, 10) mínim.

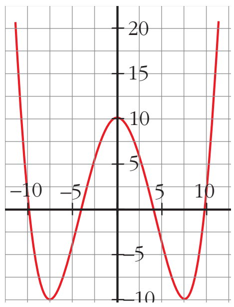
• **Monotonia** $f(x)$ creix si $x \in (-3, 0) \cup (3, +\infty)$.

$f(x)$ decreix si $x \in (-\infty, -3) \cup (0, 3)$.

• $f''(x) = 3x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = -\sqrt{3}$ $f(-\sqrt{3}) = -1{,}25$ $(-\sqrt{3}, -1{,}25)$ punt d'inflexió.

$x = \sqrt{3}$ $f(\sqrt{3}) = 1{,}25$ $(\sqrt{3}, 1{,}25)$ punt d'inflexió.

• **Gràfica:**



d) • **No té simetria.**

• **Branca** infinita quan $x \rightarrow \infty$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ Branca parabòlica.

Branca infinita quan $x \rightarrow -\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ Branca parabòlica.

• **Punts singulars.**

Talls amb eixos (0, 0).

$f'(x) = 0$ $x = 0$ $f(0) = 0$ (0, 0) màxim.

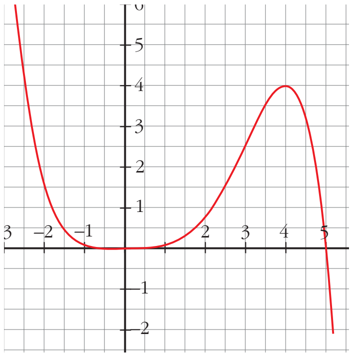
$x = 4$ $f(4) = 4$ (4, 4) mínim.

• **Monotonia** $f(x)$ creix si $x \in (0, 4)$.

$f(x)$ decreix si $x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.

• $f''(x) = 0$ $x = 3$ $f(3) = 5/2$ (3, 5/2) punt d'inflexió.

- **Gràfica:**



e) - **Té simetria senar.**
- **Branca** infinita quan $x \rightarrow \infty$.

  $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ Branca parabòlica.

  Branca infinita quan $x \rightarrow -\infty$.

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ Branca parabòlica.
- **Punts singulars.**

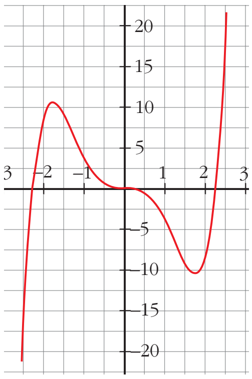
  Talls amb eixos $(-\sqrt{5}, 0)$ $(0, 0)$ $(\sqrt{5}, 0)$.

  $f'(x) = 0$ $x = -\sqrt{3}$ $f(-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$ $(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$ màxim.

  $x = 0$ $f(0) = 0$ $(0, 0)$.

  $x = \sqrt{3}$ $f(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$ $(\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$ mínim.
- **Monotonia** $f(x)$ creix si $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

  $f(x)$ decreix si $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.
- $f''(x) = 0$ $x = 0$ $(0, 0)$ punt d'inflexió.
- **Gràfica:**



f) - **No té simetria.**
- **Branca** infinita quan $x \rightarrow \infty$.

  $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$ Branca parabòlica.

Branca infinita quan $x \rightarrow -\infty$.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ Branca parabòlica.

- **Punts singulars.**

  Talls amb eixos (3,104, 0).

  $f'(x) = 0$ $x = 0$ $f(0) = -1$ (0, –1) màxim.

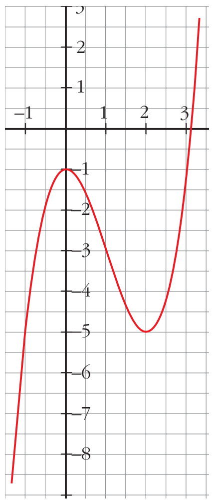
  $x = 2$ $f(2) = -5$ (2, –5) mínim.

- **Monotonia** $f(x)$ creix si $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

  $f(x)$ decreix si $x \in (0, 2)$.

- $f''(x) = 0$ $x = 1$ $f(1) = -3$ (1, –3) punt d'inflexió.

- **Gràfica:**



24. **Estudia les branques infinites, creixement, màxims i mínims i punts d'inflexió de les funcions següents i representa-les:**

a) $y = 3 + (2 - x)^3$ **b)** $y = 2 - (x - 3)^4$

c) $y = (x + 1)^6 - 5$ **d)** $y = 3 - (1 - x)^3$

a) • **Branca** infinita quan $x \rightarrow \infty$.

$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ Branca parabòlica.

Branca infinita quan $x \rightarrow -\infty$.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ Branca parabòlica.

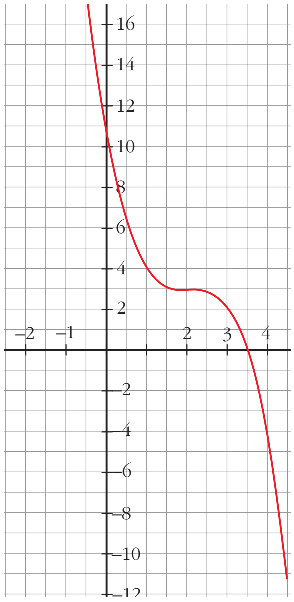
- **Punts singulars.**

  Talls amb eixos (0, 11) (3,442, 0).

  $f'(x) = 3(2 - x)^2$ $f'(x) = 0$ $x = 2$ $f(2) = 3$ (2, 3) punt d'inflexió.

- **Monotonia** $f(x)$ decreix si $x \in (-\infty, +\infty)$.

• **Gràfica:**



b) • **Branca** infinita quan $x \rightarrow \infty$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ Branca parabòlica.

Branca infinita quan $x \rightarrow -\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ Branca parabòlica.

• **Punts singulars.**

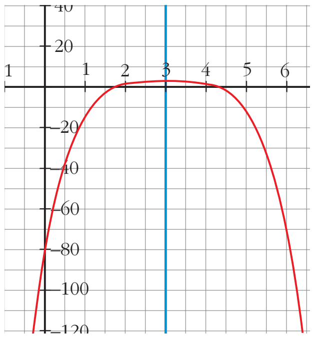
Talls amb eixos (1,811, 0) (4,190, 0) (0, –79).

$f'(x) = -4(x-3)^3 = 0 \quad x = 3 \quad f(3) = 2 \quad (3, 2)$ màxim.

• **Monotonia** $f(x)$ creix si $x \in (-\infty, 3)$.

$f(x)$ decreix si $x \in (3, +\infty)$.

• **Gràfica:**



c) • **Branca** infinita quan $x \rightarrow \infty$.

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ Branca parabòlica.

Branca infinita quan $x \rightarrow -\infty$.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ Branca parabòlica.

• **Punts singulars.**

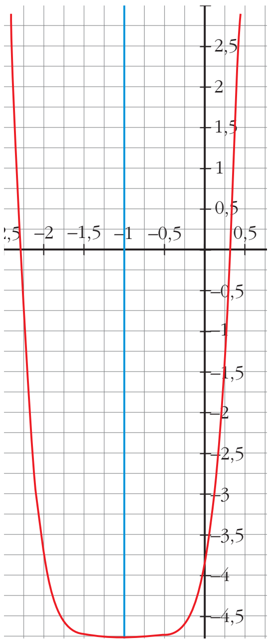
Talls amb eixos (–2,308, 0) (0,0308, 0) (0, –4).

$f'(x) = 6(x - +1)^5 = 0 \quad x = -1 \quad f(-1) = -5 \quad (-1, -5)$ mínim.

• **Monotonia** $f(x)$ creix si $x \in (-1, +\infty)$.

$f(x)$ decreix si $x \in (-\infty, -1)$.

• **Gràfica:**



d) • **Branca** infinita quan $x \rightarrow \infty$.

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ Branca parabòlica.

Branca infinita quan $x \rightarrow -\infty$.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ Branca parabòlica.

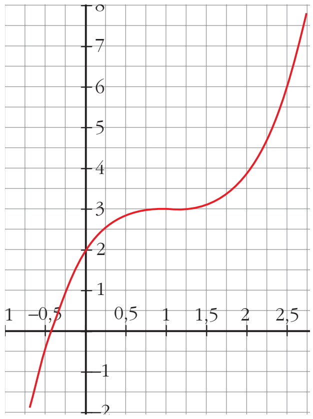
• **Punts singulars.**

Talls amb eixos (–0,442, 0) (0, 2).

$f'(x) = +3(1 - x)^2 = 0 \quad x = 1 \quad f(1) = 3 \quad (1, 3)$ punt d'inflexió.

• **Monotonia** $f(x)$ creix si $x \in (-\infty, +\infty)$.

• **Gràfica:**



25. **En les funcions següents, estudia'n el domini, asímptotes i posició de la corba respecte d'aquestes, i representa-les a partir dels resultats obtinguts:**

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ **b)** $y = \dfrac{-1}{x^2 + 1}$ **c)** $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ **e)** $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$ **f)** $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

• **Domini:** $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

• **Asímptotes:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

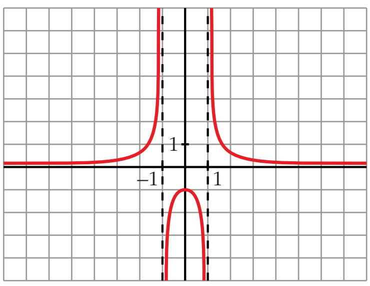
$y = 0$ és asímptota horitzontal.

(si $x \to -\infty$, $f(x) > 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\}$ $x = -1$ és asímptota vertical

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ $x = 1$ és asímptota vertical

• **Gràfica:**



b) $y = \dfrac{-1}{x^2 + 1}$

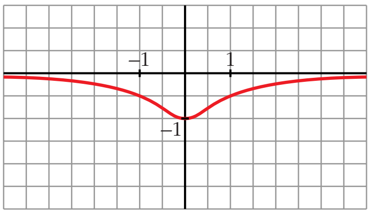
- **Domini:** $\mathbb{R}$
- **Asímptotes:**

  No té asímptotes verticals.

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0.$ Asímptota horitzontal en $y = 0$

  (si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 0$)

- **Gràfica:**



c) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

- **Domini:** $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- **Asímptotes:**

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

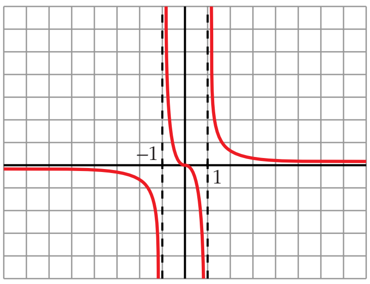
  (si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

  $y = 0$ és asímptota horitzontal.

  $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ $x = -1$ és asímptota vertical

  $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ $x = 1$ és asímptota vertical

- **Gràfica:**



d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x} = x - \dfrac{1}{x}$

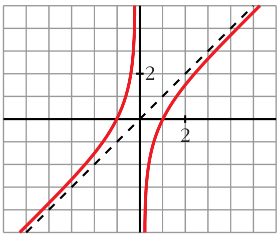
- **Domini:** $\mathbb{R} - \{0\}$
- **Asímptotes:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ és asímptota vertical}$$

$y = x$ és asímptota obliqua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) > x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < x$)

- **Gràfica:**



e) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$

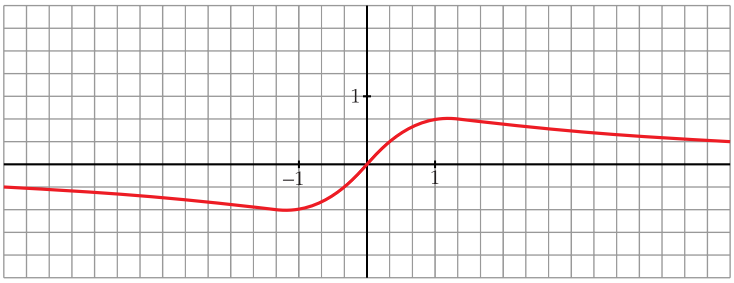
- **Domini:** $\mathbb{R}$
- **Asímptotes:**

No té asímptotes verticals.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Asímptota horitzontal en $y = 0$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

- **Gràfica:**



f) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

- **Domini:**

$x^2 + x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \quad \rightarrow$ No té solució.

$D = \mathbb{R}$

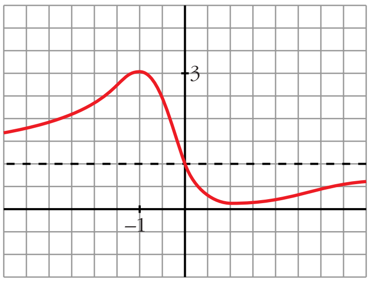
- **Asímptotes:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > 1$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < 1$)

$y = 1$ és asímptota horitzontal.

- **Gràfica:**



Pàgina 300

PER RESOLDRE

26. **Representa les funcions següents estudiant-ne prèviament:**

– El domini de definició, les asímptotes i la posició de la corba respecte d'aquestes.

– Els intervals de creixement i de decreixement, i els extrems relatius.

a) $y = 2x + \dfrac{8}{x}$ **b)** $y = \dfrac{2x}{(x+1)^2}$

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$ **d)** $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

e) $y = \dfrac{4x - 12}{(x-2)^2}$ **f)** $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$

g) $y = \dfrac{(x-1)(x-3)}{x-2}$ **h)** $y = \dfrac{x^2}{9 - x^2}$

i) $y = \dfrac{x^2 + 4}{x}$ **j)** $y = \dfrac{x^2}{(x-3)^2}$

k) $\boldsymbol{y = \dfrac{2x^3}{x^2+1}}$

l) $\boldsymbol{y = \dfrac{x^4}{x^2-4}}$

m) $\boldsymbol{y = \dfrac{x^3}{x+2}}$

n) $\boldsymbol{y = \dfrac{(x-2)^2}{x-1}}$

a) $y = 2x + \dfrac{8}{x}$

- **Domini:** $\mathbb{R} - \{0\}$
- **Asímptotes:**

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 0 \text{ és asímptota vertical}$$

$y = 2x$ és asímptota obliqua.

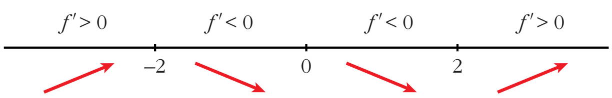
(si $x \to -\infty$, $f(x) < 2x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 2x$)

- **Creixement, decreixement, extrems relatius:**

$f'(x) = 2 - \dfrac{8}{x^2}$

$f'(x) = 0 \;\to\; \dfrac{2x^2 - 8}{x^2} = 0 \;\to\; x^2 = 4 \left\langle \begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Signe de la derivada:



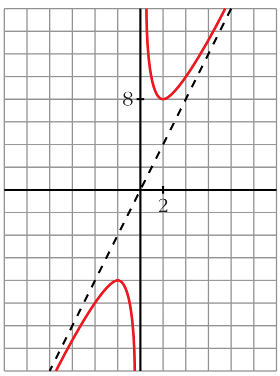
$f(x)$ és creixent en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

és decreixent en $(-2, 0) \cup (0, 2)$

té un màxim en $(-2, -8)$

té un mínim en $(2, 8)$

- **Gràfica:**



b) $y = \dfrac{2x}{(x+1)^2}$

- **Domini:** $\mathbb{R} - \{-1\}$

- **Asímptotes:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ és asímptota horitzontal.

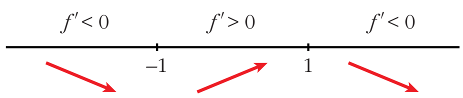
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \; x = -1 \text{ és asímptota vertical}$$

- **Creixement, decreixement, extrems relatius:**

$$f'(x) = \frac{2(x+1)^2 - 2x \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)(2x+2-4x)}{(x+1)^4} = \frac{-2x+2}{(x+1)^3}$$

$f'(x) = 0 \;\to\; -2x + 2 = 0 \;\to\; x = 1$

Signe de $f'(x)$:

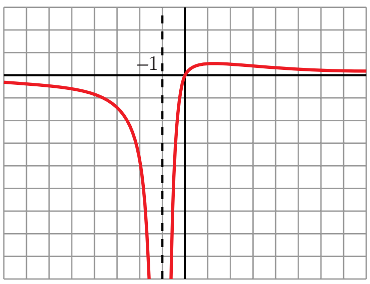


$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

és creixent en $(-1, 1)$

té un màxim en $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$

- **Gràfica:**



c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4} = x + \dfrac{4x}{x^2 - 4}$

- **Domini:** $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

• **Asímptotes:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = -2 \text{ és asímptota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 2 \text{ és asímptota vertical}$$

$y = x$ és asímptota obliqua.

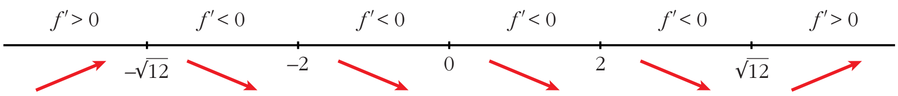
(si $x \to -\infty$, $f(x) < x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x$)

• **Creixement, decreixement, extrems relatius:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; x^2(x^2-12) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{12} \\ x = \sqrt{12} \end{cases}$$

Signe de $f'(x)$:



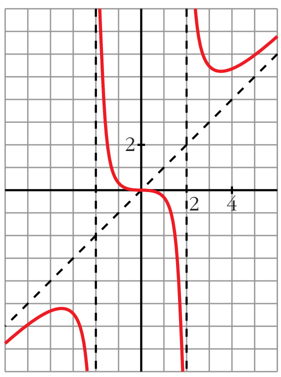
$f(x)$ és creixent en $(-\infty, -\sqrt{12}) \cup (\sqrt{12}, +\infty)$

és decreixent en $(-\sqrt{12}, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \sqrt{12})$

té un màxim en $(-\sqrt{12}, -3\sqrt{3})$

té un mínim en $(\sqrt{12}, 3\sqrt{3})$

• **Gràfica:**



d) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = x - 1 + \dfrac{1}{x - 1}$

• **Domini:** $\mathbb{R} - \{1\}$

• **Asímptotes:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 1 \text{ és asímptota vertical}$$

$y = x - 1$ és asímptota obliqua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) < x - 1$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x - 1$)

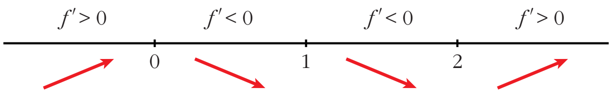
• **Creixement, decreixement, extrems relatius:**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signe de $f'(x)$:



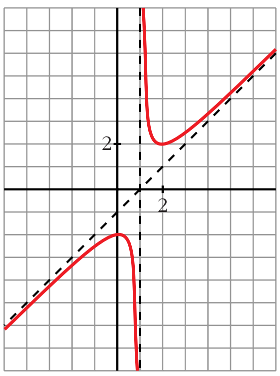
$f(x)$ és creixent en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

és decreixent en $(0, 1) \cup (1, 2)$

té un màxim en $(0, -2)$

té un mínim en $(2, 2)$

• **Gràfica:**



e) $y = \dfrac{4x - 12}{(x-2)^2}$

• **Domini:** $\mathbb{R} - \{2\}$

• **Asímptotes:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asímptota obliqua.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \; x = 2 \text{ és asímptota vertical}$$

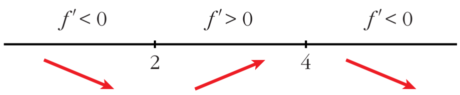
• **Creixement, decreixement, extrems relatius:**

$$f'(x) = \frac{4(x-2)^2 - (4x-12) \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{4(x-2) - 2(4x-12)}{(x-2)^3} =$$

$$= \frac{4x - 8 - 8x + 24}{(x-2)^3} = \frac{-4x + 16}{(x-2)^3}$$

$f'(x) = 0 \;\to\; -4x + 16 = 0 \;\to\; x = 4$

Signe de $f'(x)$:

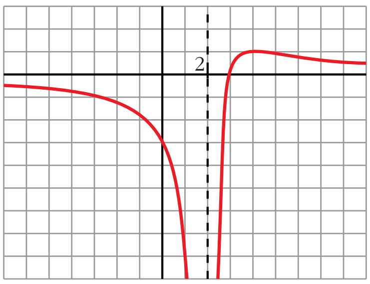


$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

és creixent en $(2, 4)$

té un màxim en $(4, 1)$

• **Gràfica:**



f) $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$

• **Domini:** $\mathbb{R} - \{2\}$

• **Asímptotes:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ és asímptota horitzontal.

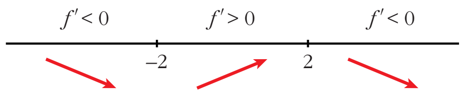
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 2 \text{ és asímptota vertical}$$

- **Creixement, decreixement, extrems relatius:**

$$f'(x) = \frac{(x-2)^2 - x \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{x-2-2x}{(x-2)^3} = \frac{-x-2}{(x-2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \;\;\to\;\; -x-2 = 0 \;\;\to\;\; x = -2$$

Signe de $f'(x)$:

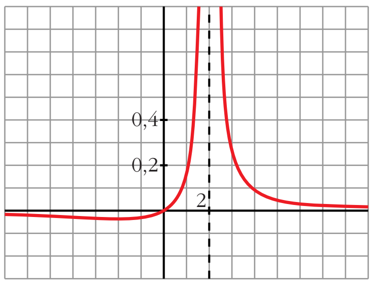


$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

és creixent en $(-2, 2)$

té un mínim en $\left(-2, \dfrac{-1}{8}\right)$

- **Gràfica:**



g) $y = \dfrac{(x-1)(x-3)}{x-2} = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x-2} = x - 2 - \dfrac{1}{x-2}$

- **Domini:** $\mathbb{R} - \{2\}$
- **Asímptotes:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \; x = 2 \text{ és asímptota vertical}$$

$y = x - 2$ és asímptota obliqua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) > x - 2$; si $x \to +\infty$, $f(x) < x - 2$)

- **Creixement, decreixement, extrems relatius:**

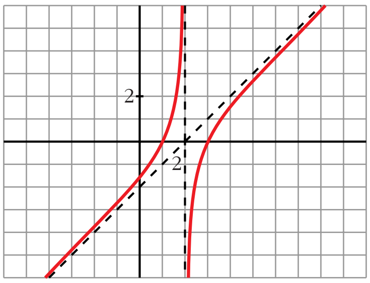
$$f'(x) = 1 + \frac{1}{(x-2)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\;\to\;\; (x-2)^2 + 1 = 0 \;\;\to\;\;$ no té solució

$f(x)$ no té extrems relatius.

$f'(x) > 0$ per a tot $x \;\;\to\;\; f(x)$ és creixent en tot el seu domini.

• **Gràfica:**



h) $y = \dfrac{x^2}{9 - x^2}$

• **Domini:** $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$

• **Asímptotes:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < -1$; si $x \to +\infty$, $f(x) < -1$)

$y = -1$ és asímptota horitzontal.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} x = -3 \text{ és asímptota vertical}$$

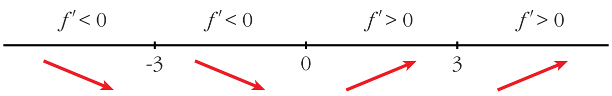
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} x = 3 \text{ és asímptota vertical}$$

• **Creixement, decreixement, extrems relatius:**

$$f'(x) = \frac{2x(9 - x^2) - x^2 \cdot (-2x)}{(9 - x^2)^2} = \frac{18x - 2x^3 + 2x^3}{(9 - x^2)^2} = \frac{18x}{(9 - x^2)^2}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad 18x = 0 \quad \to \quad x = 0$

Signe de $f'(x)$:

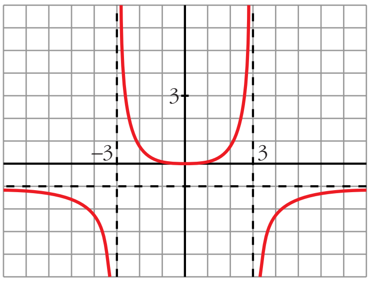


$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$

és creixent en $(0, 3) \cup (3, +\infty)$

té un mínim en $(0, 0)$

• **Gràfica:**



i) $y = \dfrac{x^2 + 4}{x} = x + \dfrac{4}{x}$

• **Domini:** $\mathbb{R} - \{0\}$

• **Asímptotes:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ és asímptota vertical}$$

$y = x$ és asímptota obliqua.

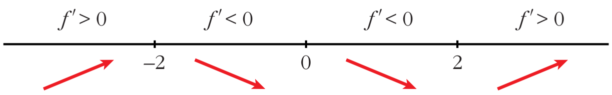
(si $x \to -\infty$, $f(x) < x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x$)

• **Creixement, decreixement, extrems relatius:**

$f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2}$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

Signe de $f'(x)$:



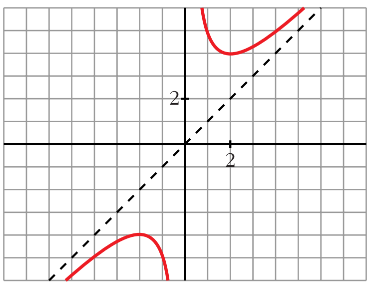
$f(x)$ és creixent en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

és decreixent en $(-2, 0) \cup (0, 2)$

té un màxim en $(-2, -4)$

té un mínim en $(2, 4)$

• **Gràfica:**



j) $y = \dfrac{x^2}{(x-3)^2}$

• **Domini:** $\mathbb{R} - \{3\}$

• **Asímptotes:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 1$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 1$)

$y = 1$ és asímptota horitzontal.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 3 \text{ és asímptota vertical}$$

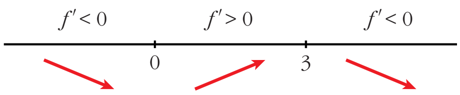
• **Creixement, decreixement, extrems relatius:**

$$f'(x) = \frac{2x(x-3)^2 - x^2 \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{2x(x-3) - 2x^2}{(x-3)^3} =$$

$$= \frac{2x^2 - 6x - 2x^2}{(x-3)^3} = \frac{-6x}{(x-3)^3}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad -6x = 0 \quad \to \quad x = 0$

Signe de $f'(x)$:

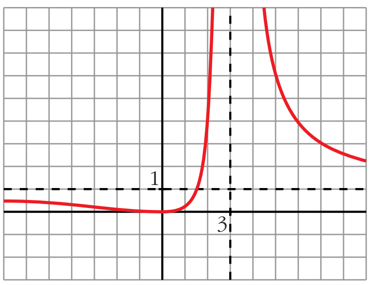


$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

és creixent en $(0, 3)$

té un mínim en $(0, 0)$

• **Gràfica:**



k) $y = \dfrac{2x^3}{x^2+1} = 2x - \dfrac{2x}{x^2+1}$

• **Domini:** $\mathbb{R}$

- **Asímptotes:**

  No té asímptotes verticals.

  $y = 2x$ és asímptota obliqua.

  (Si $x \to -\infty$, $f(x) > 2x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 2x$.)

- **Creixement, decreixement, extrems relatius:**

$$f'(x) = \frac{6x^2(x^2+1) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{6x^4 + 6x^2 - 4x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^4 + 6x^2}{(x^2+1)^2}$$

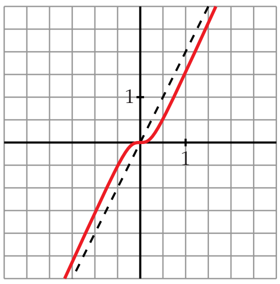
$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x^2(x^2+3) = 0 \quad \to \quad x = 0$$

  Signe de $f'(x)$:

  $f'(x) > 0$ per a tot $x \neq 0$

  $f(x)$ és creixent en tot $\mathbb{R}$.

- **Gràfica:**



l) $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 4}$

- **Domini:** $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- **Asímptotes:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \; x = -2 \text{ és asímptota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 2 \text{ és asímptota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \end{array}\right\} \; \text{Branques parabòliques}$$

- **Creixement, decreixement, extrems relatius:**

$$f'(x) = \frac{4x^3(x^2-4) - x^4 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{4x^5 - 16x^3 - 2x^5}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^5 - 16x^3}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{2x^3(x^2-8)}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^3(x^2-8) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{8} \\ x = \sqrt{8} \end{cases}$$

Signe de $f'(x)$:

$f'<0$	$-\sqrt{8}$	$f'>0$	-2	$f'>0$	0	$f'<0$	2	$f'<0$	$\sqrt{8}$	$f'>0$
↘		↗		↗		↘		↘		↗

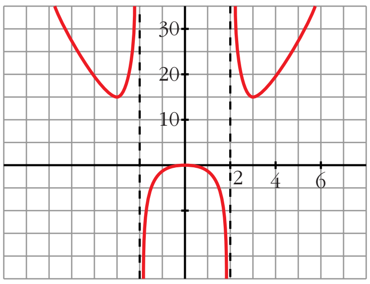
$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, -\sqrt{8}) \cup (0, 2) \cup (2, \sqrt{8})$

és creixent en $(-\sqrt{8}, -2) \cup (-2, 0) \cup (\sqrt{8}, +\infty)$

té un mínim en $(-\sqrt{8}, 16)$ i un altre en $(\sqrt{8}, 16)$

té un màxim en $(0, 0)$

- **Gràfica:**



m) $y = \dfrac{x^3}{x+2}$

- **Domini:** $\mathbb{R} - \{-2\}$

- **Asímptotes:**

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to -2^-} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \to -2^+} f(x) &= -\infty \end{aligned}\right\} \; x = -2 \text{ és asímptota vertical}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{aligned}\right\} \; \text{Branques parabòliques}$$

- **Creixement, decreixement, extrems relatius:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x+2) - x^3}{(x+2)^2} = \frac{3x^3 + 6x^2 - x^3}{(x+2)^2} = \frac{2x^3 + 6x^2}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x^2(x+3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

Signe de $f'(x)$:

$f' < 0$	-3	$f' > 0$	-2	$f' > 0$	0	$f' > 0$
↘		↗		↗		↗

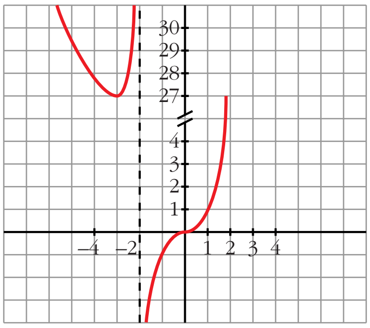
$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, -3)$

és creixent en $(-3, -2) \cup (-2, +\infty)$

té un mínim en $(-3, 27)$

té un punt d'inflexió en $(0, 0)$

- **Gràfica:**



n) $y = \dfrac{(x-2)^2}{x-1} = x - 3 + \dfrac{1}{x-1}$

- **Domini:** $\mathbb{R} - \{1\}$
- **Asímptotes:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ és asímptota vertical}$$

$y = x - 3$ és asímptota obliqua.

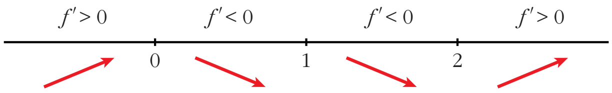
(Si $x \to -\infty$, $f(x) < x - 3$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x - 3$.)

- **Creixement, decreixement, extrems relatius:**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signe de $f'(x)$:



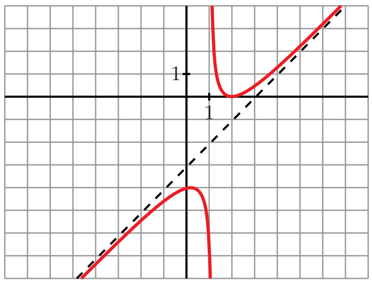
$f(x)$ és creixent en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

és decreixent en $(0, 1) \cup (1, 2)$

té un màxim en $(0, -4)$

té un mínim en $(2, 0)$

- **Gràfica:**



27. **a) Troba les asímptotes de la gràfica de la funció definida per a $x > 0$ per $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{x}$.**

b) Troba les regions de creixement i de decreixement de f indicant-ne els màxims i mínims locals i globals, si n'hi ha.

c) Esbossa la gràfica de f.

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \quad \to \quad x = 0$ és asímptota vertical.

$f(x) = x + \dfrac{1}{x} \quad \to \quad y = x$ és asímptota obliqua.

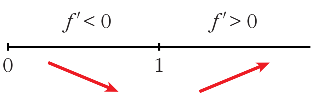
(Si $x \to +\infty$, $f(x) > x$)

b) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2 - 1 = 0$ $\begin{cases} x = -1 & \text{(no val)} \\ x = 1 \end{cases}$

($x = -1$ no val, ja que $f(x)$ està definida tan sols per a $x > 0$)

Signe de $f'(x)$:



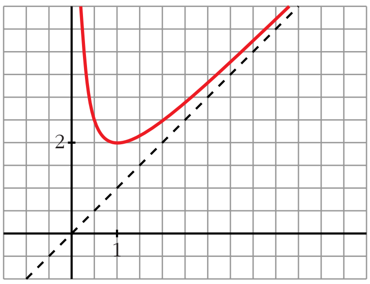
$f(x)$ és decreixent en $(0, 1)$

és creixent en $(1, +\infty)$

té un mínim (local i global) en $(1, 2)$

no té un màxim

c)



28. Donada la funció $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$, es demana:

a) Domini de definició, asímptotes i posició de la corba respecte a aquestes.

b) Màxims i mínims relatius, i intervals de creixement i de decreixement.

c) Dibuixa la gràfica de f.

a) • **Domini:** $\mathbb{R}$

• **Asímptotes:**

No té asímptotes verticals.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x+1}{\sqrt{x^2+1}} = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$

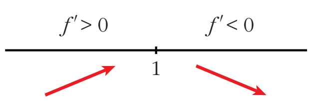
$y = -1$ és asímptota horitzontal quan $x \to -\infty$ $(f(x) > -1)$

$y = 1$ és asímptota horitzontal quan $x \to +\infty$ $(f(x) > 1)$

b) $$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x+1) \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(x^2+1)} = \frac{x^2+1-x^2-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = \frac{1-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

$f'(x) = 0 \;\to\; 1 - x = 0 \;\to\; x = 1$

Signe de $f'(x)$:

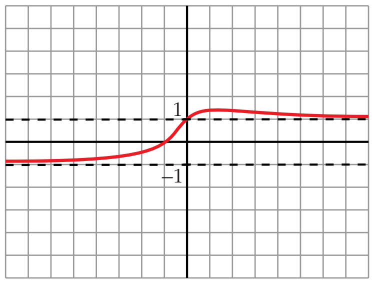


$f(x)$ és creixent en $(-\infty, 1)$

és decreixent en $(1, +\infty)$

té un màxim en $(1, \sqrt{2})$

c)



29. **Representa gràficament la funció: $p(x) = x^4 + 4/3x^3 + 2x^2 - 2$**
Quantes arrels reals té aquest polinomi $p(x)$?

$$p(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - 2$$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} p(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$

- $p'(x) = 4x^3 + 4x^2 + 4x = 4x(x^2 + x + 1)$

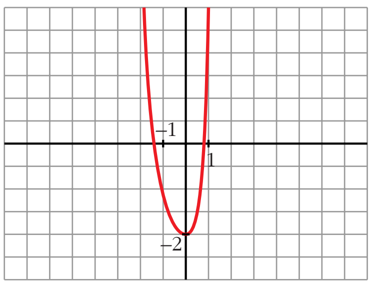
  $p'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\;$ Hi ha un punt singular en $(0, -2)$.

- $p''(x) = 12x^2 + 8x + 4 = 4(3x^2 + 2x + 1)$

  $p''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{6} \;\rightarrow\;$ no té solució.

  $p(x)$ no té punts d'inflexió.

- **Gràfica:**



- $f(x)$ té dues arrels reals.

30. **Donades les funcions següents, troba'n les asímptotes, estudia'n el creixement i l'existència de màxims i mínims. Dibuixa'n la gràfica:**

a) $y = \dfrac{e^x}{x^2 - 3}$ **b)** $y = \dfrac{x^3}{4x^2 + 1}$

c) $y = x + \dfrac{4}{(x-1)^2}$ **d)** $y = \sqrt{x^2 - 4} - x - 2$

a) $y = \dfrac{e^x}{x^2 - 3}$

- **Domini:** $\mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

- **Asímptotes:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\sqrt{3}^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\sqrt{3}^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = -\sqrt{3} \text{ és asímptota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \sqrt{3}^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to \sqrt{3}^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = \sqrt{3} \text{ és asímptota vertical}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^2 - 3} = 0 \quad \to \quad y = 0 \text{ és asímptota horitzontal quan } x \to -\infty$$

$(f(x) > 0)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to \quad \text{Branca parabòlica}$$

- **Creixement, màxims i mínims:**

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 - 3) - e^x \cdot 2x}{(x^2 - 3)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x - 3)}{(x^2 - 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \to \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Signe de $f'(x)$:

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, -1)$	$(-1, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, 3)$	$(3, +\infty)$
signe	$f' > 0$	$f' > 0$	$f' < 0$	$f' < 0$	$f' > 0$
f	↗	↗	↘	↘	↗

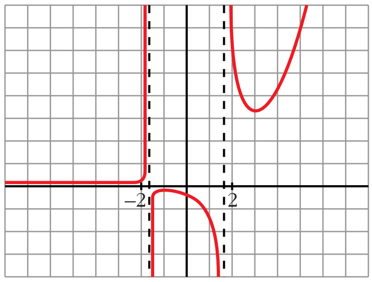
$f(x)$ és creixent en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, -1) \cup (3, +\infty)$

és decreixent en $(-1, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 3)$

té un màxim en $\left(-1, \dfrac{-1}{2e}\right)$

té un mínim en $\left(3, \dfrac{e^3}{6}\right)$

- **Gràfica:**



b) $y = \dfrac{x^3}{4x^2 + 1} = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{(1/4)x}{4x^2 + 1}$

- **Domini:** $\mathbb{R}$
- **Asímptotes:**

No té asímptotes verticals.

$y = \dfrac{1}{4}x$ és asímptota obliqua.

(Si $x \to -\infty$, $f(x) > \dfrac{1}{4}x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < \dfrac{1}{4}x$)

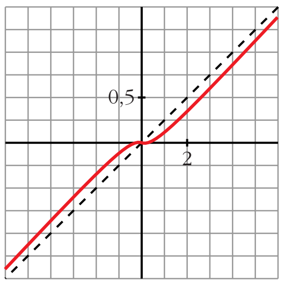
- **Creixement, màxims i mínims:**

$f'(x) = \dfrac{3x^2(4x^2 + 1) - x^3 \cdot 8x}{(4x^2 + 1)^2} = \dfrac{12x^4 + 3x^2 - 8x^4}{(4x^2 + 1)^2} = \dfrac{4x^4 + 3x^2}{(4x^2 + 1)^2}$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2(4x^2 + 3) = 0 \quad \to \quad x = 0 \quad \to \quad (0, 0)$

$f'(x) > 0$ si $x \neq 0 \quad \to \quad f(x)$ és creixent $\big($té un punt d'inflexió en $(0, 0)\big)$

- **Gràfica:**



c) $y = x + \dfrac{4}{(x - 1)^2}$

- **Domini:** $\mathbb{R} - \{1\}$
- **Asímptotes:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 1 \text{ és asímptota vertical}$$

$y = x$ és asímptota obliqua.

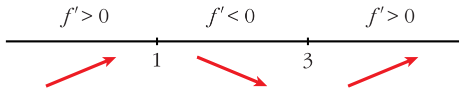
(Si $x \to -\infty$, $f(x) > x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x$)

- **Creixement, decreixement, extrems relatius:**

$$f'(x) = 1 - \frac{8}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)^3 - 8}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; (x-1)^3 = 8 \;\rightarrow\; x - 1 = 2 \;\rightarrow\; x = 3$$

Signe de $f'(x)$:

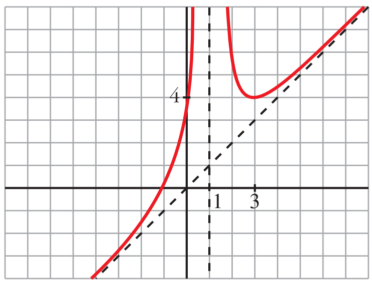


$f(x)$ és creixent en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

és decreixent en $(1, 3)$

té un mínim en $(3, 4)$

- **Gràfica:**



d) $y = \sqrt{x^2 - 4} - x - 2$

- **Domini:** $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
- **Asímptotes:**

No té asímptotes verticals.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - 4} + x - 2\right] = +\infty$$

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4} + x - 2}{-x} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$n = \lim_{x \to -\infty} [f(x) + 2x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - 4} + x - 2 - 2x\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - 4} - x - 2\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - 4} - (x + 2)\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2 - 4} - (x + 2)\right]\left[\sqrt{x^2 - 4} + (x + 2)\right]}{\left[\sqrt{x^2 - 4} + (x + 2)\right]} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4 - (x + 2)^2}{\sqrt{x^2 - 4} + x + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4 - x^2 - 4x - 4}{\sqrt{x^2 - 4} + x + 2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-4x - 8}{\sqrt{x^2 - 4} + x + 2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$y = -2x - 2$ és asímptota obliqua quan $x \to -\infty$.

$(f(x) < -2x - 2)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - 4} - x - 2\right] = -2$$

$y = -2$ és asímptota horitzontal.

$(f(x) < -2)$

- **Creixement, màxims i mínims:**

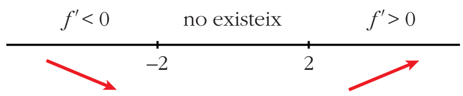
$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 4}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

$f(x)$ no és derivable en $x = -2$ ni en $x = 2$.

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x - \sqrt{x^2 - 4} = 0 \;\rightarrow\; x = \sqrt{x^2 - 4} \;\rightarrow\; x = x^2 - 4 \;\rightarrow$

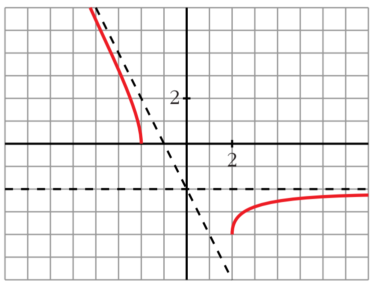
$\rightarrow$ no té solució $\rightarrow$ no hi ha punts singulars

Signe de $f'(x)$:



$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, -2)$ i és creixent en $(2, +\infty)$.

- **Gràfica:**



31. **Estudia els màxims, mínims i punts d'inflexió de les funcions següents i representa-les gràficament:**

a) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ **b)** $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ **c)** $y = \sin x + \cos x$ **per a** $0 \le x \le 2\pi$

a) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$. Aquesta funció s'anomena sinus hiperbòlic de x.

- $f'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; e^x + e^{-x} = 0 \;\rightarrow$ no té solució $\rightarrow$

$\rightarrow$ no hi ha màxims ni mínims

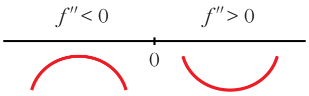
$f'(x) > 0$ per a tot $x \;\rightarrow\; f(x)$ és creixent

• $f''(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; e^x - e^{-x} = 0 \;\rightarrow\; e^x - \dfrac{1}{e^x} = 0 \;\rightarrow\; e^{2x} - 1 = 0$

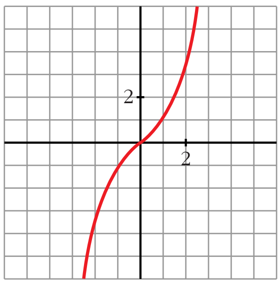
$e^{2x} = 1 \;\rightarrow\; 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 0$

Signe de $f''(x)$:



Hi ha un punt d'inflexió en $(0, 0)$.

• **Gràfica:**

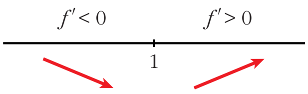


b) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathit{cosh}\ x$. Aquesta funció s'anomena cosinus hiperbòlic de x.

• $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; e^x - e^{-x} = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 1$

Signe de $f'(x)$:

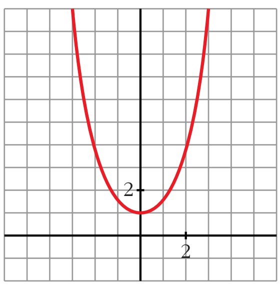


Hi ha un mínim en $(0, 1)$.

• $f''(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\;$ no té solució $\;\rightarrow\;$ no hi ha punts d'inflexió

• **Gràfica:**

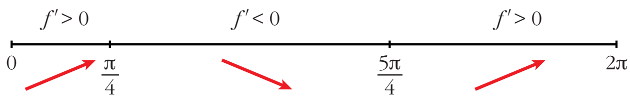


c) $y = sin\,x + cos\,x$ per a $0 \le x \le 2\pi$

- $f'(x) = cos\,x - sin\,x$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; cos\,x = sin\,x \;\rightarrow\; tg\,x = 1 \left\langle \begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{5\pi}{4} \end{array} \right.$$

Signe de $f'(x)$:

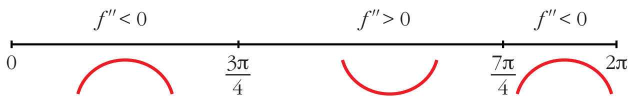


Hi ha un màxim en $\left(\dfrac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ i un mínim en $\left(\dfrac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$.

- $f''(x) = -sin\,x - cos\,x$

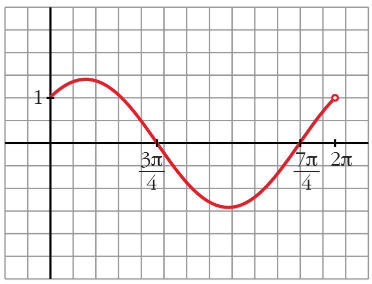
$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; sin\,x = -cos\,x \;\rightarrow\; tg\,x = -1 \left\langle \begin{array}{l} x = \dfrac{3\pi}{4} \\ x = \dfrac{7\pi}{4} \end{array} \right.$$

Signe de $f''(x)$:



Hi ha un punt d'inflexió en $\left(\dfrac{3\pi}{4}, 0\right)$ i un altre en $\left(\dfrac{7\pi}{4}, 0\right)$.

- **Gràfica:**



32. **Representa les funcions següents:**

a) $y = \dfrac{x}{e^x}$ **b)** $y = \dfrac{ln\,x}{x}$

c) $y = x\,ln\,x$ **d)** $y = (x-1)e^x$

e) $y = e^{-x^2}$ **f)** $y = x^2e^{-x}$

g) $y = \dfrac{x^3}{ln\,x}$ **h)** $y = ln\,(x^2 - 1)$

a) $y = \dfrac{x}{e^x}$

- **Domini:** $\mathbb{R}$

- **Asímptotes:**

  No té asímptotes verticals.

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to \quad \text{Branca parabòlica}$$

  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

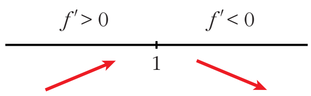
  $y = 0$ és asímptota horitzontal quan $x \to +\infty$ $(f(x) > 0)$.

- **Punts singulars:**

  $$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

  $f'(x) = 0 \quad \to \quad 1 - x = 0 \quad \to \quad x = 1$

  Signe de $f'(x)$

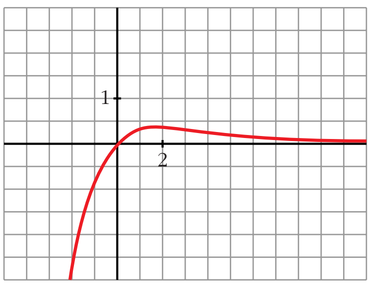
  $f(x)$ és creixent en $(-\infty, 1)$

  és decreixent en $(1, +\infty)$

  té un màxim en $\left(1, \dfrac{1}{e}\right)$

- Talla els eixos en el punt $(0, 0)$.

- **Gràfica:**



b) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

- **Domini:** $(0, +\infty)$

- **Asímptotes:**

  $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \quad \to \quad x = 0 \text{ és asímptota vertical}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{x} = 0$$

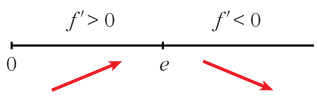
$y = 0$ és asímptota horitzontal quan $x \to +\infty$ $(f(x) > 0)$.

- **Punts singulars:**

$$f'(x) = \frac{(1/x) \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; \ln x = 1 \;\to\; x = e$$

Signe de $f'(x)$:



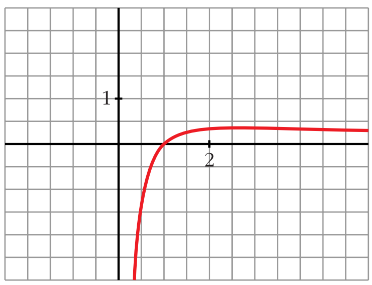
$f(x)$ és creixent en $(0, e)$

és decreixent en $(e, +\infty)$

té un màxim en $\left(e, \dfrac{1}{e}\right)$

- Talla l'eix X en $(1, 0)$.

- **Gràfica:**



c) $y = x \ln x$

- **Domini:** $(0, +\infty)$

- **Asímptotes:**

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

No té asímptotes verticals.

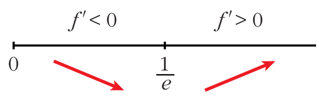
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \;\to\; \text{Branca parabòlica}$$

- **Punts singulars:**

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \ln x = -1 \;\rightarrow\; x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

Signe de $f'(x)$:



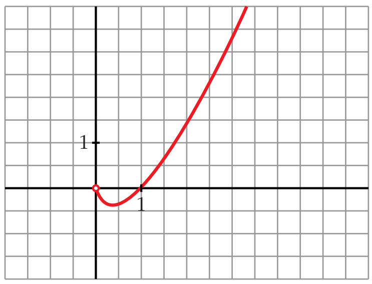
$f(x)$ és decreixent en $\left(0, \dfrac{1}{e}\right)$

és creixent en $\left(\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$

té un mínim en $\left(\dfrac{1}{e}, -\dfrac{1}{e}\right)$

• Talla l'eix X en $(1, 0)$.

• **Gràfica:**



d) $y = (x-1)\,e^x$

• **Domini:** $\mathbb{R}$

• **Asímptotes:**

No té asímptotes verticals.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x-1)\,e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x-1}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$$

$y = 0$ és asímptota horitzontal quan $x \to -\infty$ $(f(x) < 0)$.

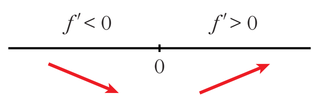
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \;\rightarrow\; \text{Branca parabòlica}$$

• **Punts singulars:**

$f'(x) = e^x + (x-1)\,e^x = e^x(1 + x - 1) = x e^x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signe de $f'(x)$:



$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, 0)$

és creixent en $(0, +\infty)$

té un mínim en $(0, -1)$

- Talla l'eix X en $(1, 0)$.

- **Gràfica:**

e) $y = e^{-x^2}$

- **Domini:** $\mathbb{R}$

- **Asímptotes:**

No té asímptotes verticals.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

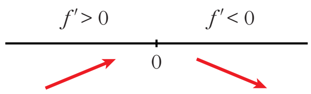
$y = 0$ és asímptota horitzontal $(f(x) > 0$ per a tot $x)$.

- **Punts singulars:**

$f'(x) = -2xe^{-x^2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signe de $f'(x)$:

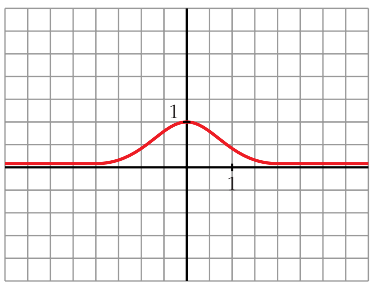


$f(x)$ és creixent en $(-\infty, 0)$

és decreixent en $(0, +\infty)$

té un mínim en $(0, 1)$

- **Gràfica:**



f) $y = x^2 e^{-x}$

- **Domini:** $\mathbb{R}$

- **Asímptotes:**

No té asímptotes verticals.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \quad \to \quad \text{Branca parabòlica}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

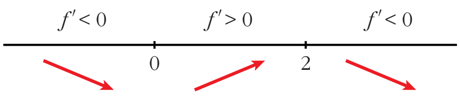
$y = 0$ és asímptota horitzontal quan $x \to +\infty$ $(f(x) > 0)$.

- **Punts singulars:** $y = \dfrac{x^2}{e^x}$

$$f'(x) = \frac{2xe^x - x^2 e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x\,(2x - x^2)}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x - x^2 = 0 \quad \to \quad x(2 - x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signe de $f'(x)$:



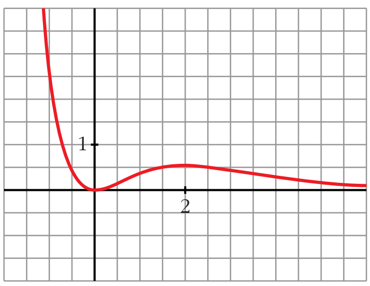
$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

és creixent en $(0, 2)$

té un mínim en $(0, 0)$

té un màxim en $\left(2, \dfrac{4}{e^2}\right)$

- **Gràfica:**



g) $y = \dfrac{x^3}{\ln x}$

- **Domini:**

$\ln x = 0 \quad \to \quad x = 1$. A més, ha de ser $x > 0$.

$D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

• **Asímptotes:**

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 1 \text{ és asímptota vertical}$$

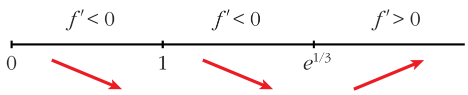
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to \quad \text{Branca parabòlica}$$

• **Punts singulars:**

$$f'(x) = \frac{3x^2 \, ln\, x - x^3 \cdot (1/x)}{(ln\, x)^2} = \frac{3x^2 \, ln\, x - x^2}{(ln\, x)^2} = \frac{x^2(3\, ln\, x - 1)}{(ln\, x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2(3 ln\, x - 1) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \;\; \text{(no val)} \\ ln\, x = 1/3 \quad \to \quad x = e^{1/3} \end{array}\right.$$

Signe de $f'(x)$:

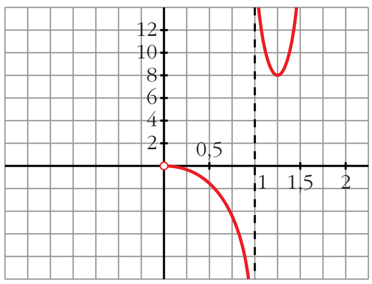


$f(x)$ és decreixent en $(0, 1) \cup (1, e^{1/3})$

és creixent en $(e^{1/3}, +\infty)$

té un mínim en $(e^{1/3}, 3e)$

• **Gràfica:**



h) $y = ln\, 7(x^2 - 1)$

• **Domini:** $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

• **Asímptotes:**

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \quad \to \quad x = -1 \text{ és asímptota vertical}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \quad \to \quad x = 1 \text{ és asímptota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty;\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = 0\\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty;\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0\end{array}\right\}\ \text{Branques parabòliques}$$

- **Punts singulars:**

  $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$

  $f'(x) = 0 \ \rightarrow\ 2x = 0 \ \rightarrow\ x = 0$

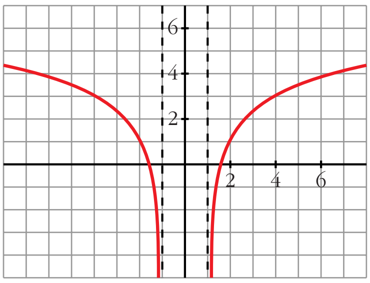
  No hi ha punts singulars ($x = 0$ no pertany al domini).

- **Punts de tall amb l'eix *X*:**

  $ln(x^2-1) = 0 \ \rightarrow\ x^2 - 1 = 1 \ \rightarrow\ x^2 = 2 \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$

  Punts: $(-\sqrt{2}, 0)$ i $(\sqrt{2}, 0)$

- **Gràfica:**



33. **Estudia i representa les funcions següents:**

a) $y = \sqrt[3]{4-x^2}$

b) $y = \sqrt{x^2-x}$

c) $y = \sqrt{x^2-4x+5}$

d) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

a) $y = \sqrt[3]{4-x^2}$

- **Domini:** $\mathbb{R}$
- **Asímptotes:**

  No té asímptotes verticals.

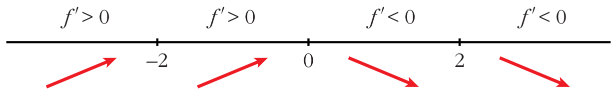
$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty;\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = 0\\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty;\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0\end{array}\right\}\ \text{Branques parabòliques}$$

- **Punts singulars:**

  $f'(x) = \dfrac{-2x}{3\sqrt[3]{(4-x^2)^2}} \ \rightarrow\ f(x)$ NO és derivable en $x = -2$ ni en $x = 2$

  $f'(x) = 0 \ \rightarrow\ -2x = 0 \ \rightarrow\ x = 0$

Signe de $f'(x)$



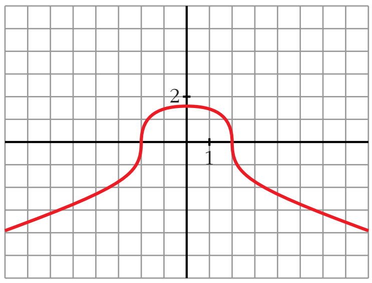
$f(x)$ és creixent en $(-\infty, 0)$

és decreixent en $(0, +\infty)$

té un màxim en $\left(0, \sqrt[3]{4}\right)$

- Talla l'eix X en $(-2, 0)$ i en $(2, 0)$.

- **Gràfica:**



b) $y = \sqrt{x^2 - x}$

- **Domini:** $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

- **Asímptotes:**

No té asímptotes verticals.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{-x} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + x} - x\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2 + x} - x\right]\left[\sqrt{x^2 + x} + x\right]}{\left(\sqrt{x^2 + x} + x\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{2}$$

$y = -x + \dfrac{1}{2}$ és asímptota obliqua quan $x \to -\infty$ $\left(f(x) < -x + \dfrac{1}{2}\right)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - x} - x\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2 - x} - x\right]\left[\sqrt{x^2 - x} + x\right]}{\left(\sqrt{x^2 - x} + x\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \frac{-1}{2}$$

$y = x - \frac{1}{2}$ es asímptota obliqua quan $x \to +\infty$ $\left(f(x) < x - \frac{1}{2}\right)$.

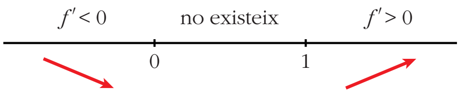
- **Punts singulars:**

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; 2x - 1 = 0 \;\to\; x = \frac{1}{2}$$

No té punts singulars $\left(\text{en } x = \frac{1}{2} \text{ no està definida } f(x)\right)$.

Signe de $f'(x)$:

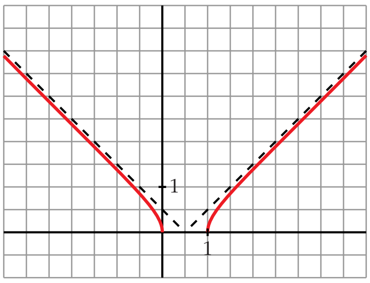


$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, 0]$

és creixent en $[1, +\infty)$

- Passa per $(0, 0)$ i $(1, 0)$.

- **Gràfica:**



c) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

- **Domini:**

$$x^2 - 4x + 5 = 0 \;\to\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} \;\to\; \text{no té solució}$$

$f(x) > 0$ per a tot x

$D = \mathbb{R}$

- **Asímptotes:**

  No té asímptotes verticals.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}{-x} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x)(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x)}{(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 4x + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x + 5}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x} =$$

$$= \frac{4}{2} = 2$$

$y = -x + 2$ és asímptota obliqua quan $x \to -\infty$ $(f(x) > -x + 2)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 - 4x + 5} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 4x + 5} - x)(\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x)}{(\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4x + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-4x + 5}{\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x} =$$

$$= \frac{-4}{2} = -2$$

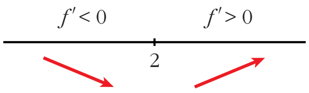
$y = x - 2$ és asímptota obliqua quan $x \to +\infty$ $\left(f(x) > x - 2\right)$.

- **Punts singulars:**

$$f'(x) = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}} = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x - 2 = 0 \quad \to \quad x = 2$$

Signe de $f'(x)$

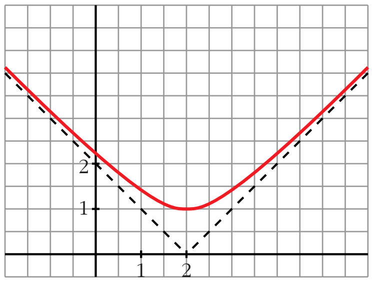


$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, 2)$

és creixent en $(2, +\infty)$

té un mínim en $(2, 1)$

- **Gràfica:**



d) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$

- **Domini:** $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- **Simetries:** $f(-x) = f(x) \rightarrow f(x)$ és parell: simètrica respecte a l'eix Y.
- **Asímptotes:**

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \rightarrow x = -1$ és asímptota vertical

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \rightarrow x = 1$ és asímptota vertical

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - 1}} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} - x\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x^2 - x\sqrt{x^2 - 1}\right)\left(x^2 + x\sqrt{x^2 - 1}\right)}{\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)\left(x^2 + x\sqrt{x^2 - 1}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - x^2(x^2 - 1)}{\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)\left(x^2 + x\sqrt{x^2 - 1}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - x^4 + x^2}{\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)\left(x^2 + x\sqrt{x^2 - 1}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2 - 1} + x(x^2 - 1)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2 - 1} + x^3 - x} = 0$$

$y = -x$ és asímptota obliqua quan $x \to -\infty$ $(f(x) > -x)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 1$$

Com que $f(x)$ és parell, la recta $y = x$ és asímptota obliqua quan $x \to +\infty$ $(f(x) > x)$.

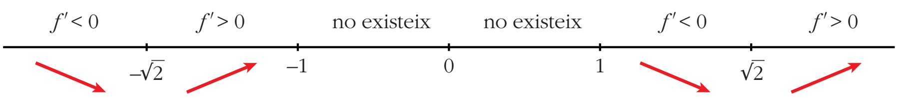
- **Punts singulars:**

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x^2 - 1} - x^2 \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}}{(x^2 - 1)} = \frac{2x(x^2 - 1) - x^3}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} = \frac{2x^3 - 2x - x^3}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} =$$

$$= \frac{x^3 - 2x}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x(x^2 - 2) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \ \text{(no val)} \\ x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Signe de $f'(x)$

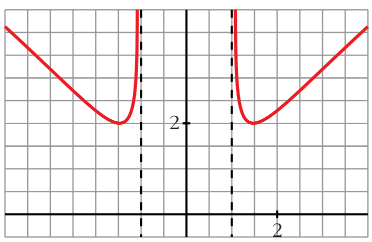


$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (1, \sqrt{2})$

és creixent en $(-\sqrt{2}, -1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

té un mínim en $(-\sqrt{2}, 2)$ i un altre en $(\sqrt{2}, 2)$

- **Gràfica:**



34. **Representa la funció:**

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Indica'n els intervals de creixement i decreixement i els extrems relatius. Té algun punt d'inflexió?

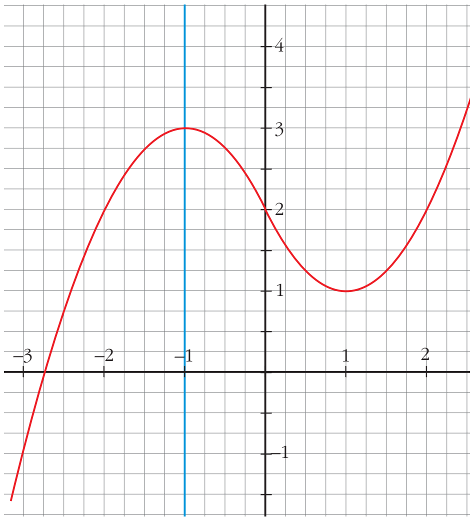
El primer tros és una paràbola convexa.

El segon tros és una paràbola còncava.

En la frontera $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2 \\ f(0) = 2 \end{array}\right\}$$

Les dues paràboles connecten en el punt (0, 2).



$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- **Extrems:**

$-2x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1.$

$2x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1.$

- **Creixement:**

$f(x)$ = creix si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

$f(x)$ = decreix si $x \in (-1, 1)$.

- **Punt d'inflexió:**

En $x = 0$ la funció passa de ser convexa a ser còncava.

35. **Estudia els intervals de creixement i decreixement, extrems relatius i curvatura de la funció següent. Representa-la.**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 1 & \text{si } x < 0 \\ (x - 1)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

El primer tros és polinòmica de grau 3 i el coeficient que multiplica a x^3 és $1 > 0 \quad \rightarrow$.

El segon tros és una paràbola còncava.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

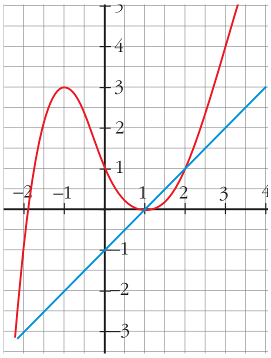
- **Extrems:**

  $3x^2 - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm 1$. Només és vàlid $x = -1$ ja que $x = 1$ cau fora de l'interval de treball $x < 0$

  Extrem en $(-1, 3)$ màxim.

  $2x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1$

  Extrem en $(1, 0)$ mínim.



- **Creixement:**

  $f(x)$ creix si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

  $f(x)$ decreix si $x \in (-1, 1)$.

- **Curvatura:**

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & \text{si } x < 0 \quad \rightarrow \quad \text{tram convex} \\ 2 & \text{si } x > 0 \quad \rightarrow \quad \text{tram còncau} \end{cases}$$

Pàgina 301

36. Dibuixa la gràfica de les funcions següents:

a) $y = x + |x + 2|$ **b)** $y = 2x - |x - 3|$

c) $y = |x| + |x - 3|$ **d)** $y = x\,|x - 1|$

a) Quan $x > -2$ el valor absolut no fa res.

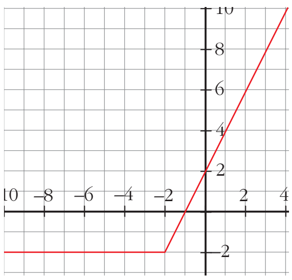
Quan $x < -2$ el valor absolut canvia el signe.

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -2 \\ 2x + 2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

El primer tram és una recta horitzontal a alçada -2.

El segon és una recta de pendent 2 i ordenada en l'origen 2.

- **Gràfica:**



b) Quan $x > 3$ el valor absolut no afecta.

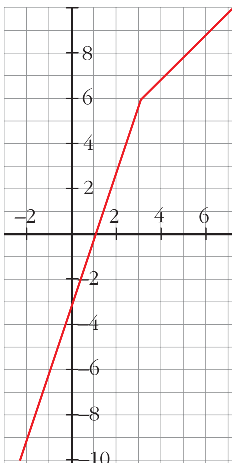
Quan $x < 3$ el valor absolut canvia el signe.

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 3 & \text{si} \quad x \le 3 \\ x + 3 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

El primer tram és una recta de pendent 3 i ordenada en l'origen –3.

El segon tram és una recta de pendent 1 i ordenada en l'origen 3.

- **Gràfica:**

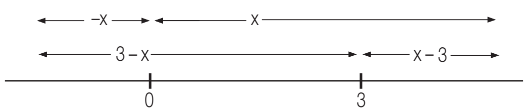


c) $|x| \rightarrow$ Quan $x > 0$ el valor absolut no afecta.

Quan $x < 0$ el valor absolut canvia el signe.

$|x - 3| \rightarrow$ Quan $x > 3$ el valor absolut no afecta.

Quan $x < 3$ el valor absolut canvia el signe.



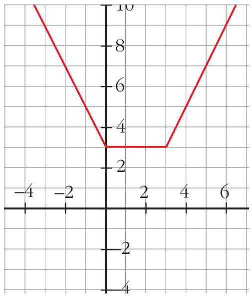
$$f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ 3 & \text{si} \quad 0 \le x \le 3 \\ 2x - 3 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

El primer tram és una recta de pendent –2 i ordenada en l'origen 3.

El segon tram és una recta horitzontal a alçada 3.

El tercer tram és una recta de pendent 2 i ordenada en l'origen –3.

• **Gràfica:**



d) Quan $x > 1$ el valor absolut no afecta.

Quan $x < 1$ el valor absolut canvia el signe.

$$f(x) = \begin{cases} x - x^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 - x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

El primer tram és una paràbola convexa.

Els punts de tall amb l'eix horitzontal són $x = 0$ i $x = 1$.

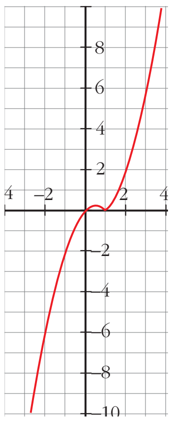
El vèrtex és a $x = 1/2$ $\quad f(1/2) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ $\quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ màxim.

El segon tram és una paràbola còncava.

Els punts de tall amb l'eix horitzontal són $x = 0$ fora de l'interval de treball i $x = 1$.

El vèrtex és a $x = \frac{1}{2}$ $\quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $\quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ fora de l'interval de treball.

• **Gràfica:**



37. **Representa gràficament:**

a) $y = \dfrac{1}{|x| - 2}$ **b)** $y = \dfrac{|2x|}{x^2 + 1}$

a) Quan $x > 0$ el valor absolut no afecta.

Quan $x < 0$ el valor absolut canvia el signe.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{-x-2} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{x-2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Com que $\dfrac{1}{|x| - 2}$ té simetria parella $f(x) = f(-x)$, representem la funció per a $x > 0$ i després fem que l'eix vertical faci de mirall.

- **Domini:** $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.
- **Asímptota vertical.**

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{|x| - 2} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$ existeix asímptota vertical en $x = 2$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -+\infty$$

- **Asímptota horitzontal.**

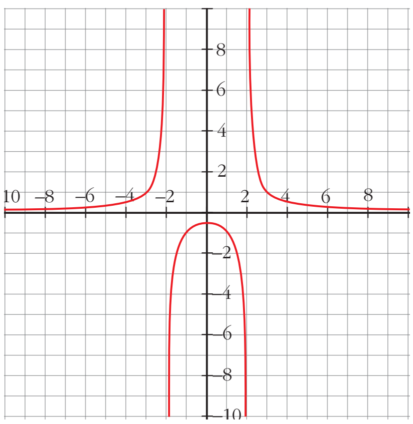
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \dfrac{1}{\infty} = 0^-$ existeix asímptota horitzontal quan $x \to \infty$ en $y = 0$ per sota.

No talla els eixos

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{-1}{(-x-2)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{-1}{(x-2)} & \text{si} \quad x > 0 \end{array} \right\}$$ sempre decreix $f(x)$ i no té extrems.

Apliquem la simetria i obtenim la representació.

- **Gràfica:**



b) Té simetria parella $f(x) = f(-x)$.

- **Domini** $\mathbb{R}$.
- **Branca infinita** quan $x \rightarrow \infty$.

  $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \dfrac{\infty}{\infty}$ grau num. < grau den. $\rightarrow$ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ per sobre.

- **Tall amb els eixos** $x = 0$ $f(0) = 0$ $(0, 0)$

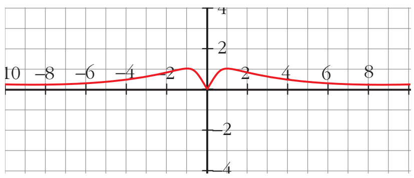
  $f'(x) = \dfrac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$

- **Extrems** $f'(x) = 0$ $2 - 2x^2 = 0$ $x = 1$ $f(1) = 1$ $(1, 1)$ màxim.
- **Monotonia** $f(x)$ creix si $(0, 1)$

  $f(x)$ decreix si $(1, +\infty)$

  Apliqueu la simetria i representeu.

- **Gràfica:**



38. **Donada la funció:**

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \in [-2\pi, 0] \\ x^2 - 2x & \text{si } x \in [0, 3] \end{cases}$$

a) Determina els punts de tall amb els eixos i els seus extrems relatius.

b) Dibuixa'n la gràfica.

a) La funció sin x és periòdica de període 2π, per tant hem de dibuixar un període.

- **Domini** $[-2\pi, 0]$ contínua i derivable.
- **Talls amb eixos** $\sin x = 0$ $\rightarrow$ $x = 0$ i $x = -\pi$ en l'interval

  $f'(x) = \cos x$.

- **Punts singulars** $\cos x = 0$ $x = \dfrac{-\pi}{2}$ i $x = \dfrac{-3\pi}{2}$ en l'interval.

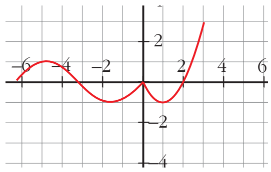
  $f(x)$ creix si $x \in \left(-2\pi, \dfrac{-3\pi}{2}\right) \in \left(\dfrac{-\pi}{2}, 0\right)$ $\left(\dfrac{-\pi}{2}, 1\right)$ mínim

  $f(x)$ decreix si $x \in \left(-\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{-\pi}{2}\right)$ $\left(-\dfrac{3\pi}{2}, 1\right)$ màxim

  La funció $x^2 - 2x$ és una paràbola còncava.

- **Tall amb eixos** $x^2 - 2x = 0$ $x = 0$ i $x = 2$
- **Punts singulars** $2x - 2 = 0$ $x = 1$ $f(1) = -1$ $(1, -1)$ mínim.

b) • **Gràfica:**



39. **Considera la funció:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1} & \text{si } x < 0 \\ -x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) En l'interval (–∞, 0] estudia l'existència de punts de tall amb els eixos, si la funció creix o decreix, l'existència de punts d'inflexió i si té asímptotes.

b) Dibuixa la gràfica en tot $\mathbb{R}$.

a) No hi ha tall amb eixos en $x \in (-\infty, 0)$.

En $x = 0$ $\quad f(0) = -0 + 1 \quad \rightarrow \quad (0, 1)$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

Si $x < 0$ num. > 0 i denom. > 0 $\rightarrow$ $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ creix si $x \in (-\infty, 0)$

$$f''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(x^2+1)^3}$$

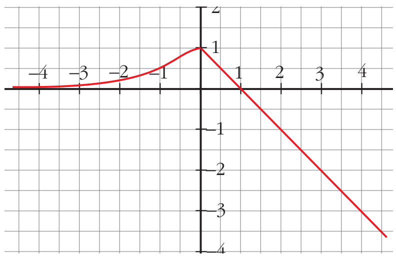
$$f''(x) = 0 \quad 6x^2 - 2 = 0 \quad x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3}{4}$$

$\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3}{4}\right)$ punt d'inflexió.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$$

Existeix una asímptota horitzontal quan x tendeix a $-\infty$ en $y = 0$.

b) • **Gràfica:**



40. **Determina les asímptotes de les funcions següents:**

a) $y = \dfrac{\sqrt{1-x}}{3x}$ **b)** $y = \dfrac{x + \sqrt{x^2+1}}{x}$

a) • **Domini** $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$

• **Asímptotes verticals:**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x}}{3x} = \frac{1}{0} = \pm\infty \quad \rightarrow \quad \text{Existeix asímptota vertical en } x = 0.$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

• **Asímptotes horitzontals:**

No hi ha branca infinita quan $x = +\infty$.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{grau num.} < \text{grau denom.} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

Existeix asímptota horitzontal quan $x = -\infty$ en $y = 0$.

b) • **Domini** $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

• **Asímptotes verticals:**

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{0}{0} \text{ ind.}$$

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{x\,(1 + \sqrt{1 + 1/x^2})}{x} \right] = \lim_{x \to 0} (1 + \sqrt{1 + 1/x^2}) = \pm\infty$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) &= +\infty \end{aligned}\right\} \text{Asímptota vertical en } x = 0$$

• **Asímptotes horitzontals:**

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{grau num.} = \text{grau denom.} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{1+1}{1} = 2$$

Existeix asímptota. horitzontal quan $x \rightarrow \infty$ en $y = 2$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{grau num.} = \text{grau denom.} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

Existeix asímptota horitzontal quan $x \rightarrow -\infty$ en $y = 0$.

41. **Troba els valors de a, b, c per als quals la funció $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4}$ té com a asímptota horitzontal la recta $y = -1$ i un mínim en (0, 1).**

$f(0) = 1$

$f'(0) = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -1$

$f(0) = \dfrac{c}{-4} = 1 \quad \rightarrow \quad c = -4$

Substituint c pel valor –4:

$$f'(x) = \frac{-bx^2 + (8 - 8a) \cdot x - 4b}{(x^2 - 4)^2}$$

$f'(0) = \dfrac{-4b}{16} = 0 \quad \rightarrow \quad b = 0$

Substituint b pel valor 0:

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{ax^2 - 4}{x^2 - 4} = \dfrac{\infty}{\infty}$ grau num. = grau denom. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a}{1} = -1 \quad \rightarrow \quad a = -1$

42. **Troba els màxims i mínims de la funció $f(x) = x\sqrt{x+3}$**

Té asímptotes?

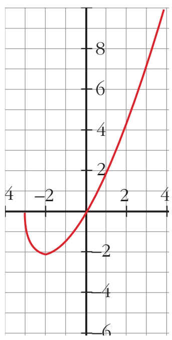
Fes una gràfica aproximada de $f(x)$.

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 6x}{2\sqrt{x^3 + 3x^2}} = \frac{3x^2 + 6x}{2x\sqrt{x+3}} = \frac{3x + 6}{2\sqrt{x+3}}$$

$f'(x) = 0 \qquad 3x + 6 = 0 \qquad x = -2 \qquad f(-2) = 2 \quad \rightarrow \quad (-2, 2)$ mínim.

No té asímptotes.

- **Gràfica:**

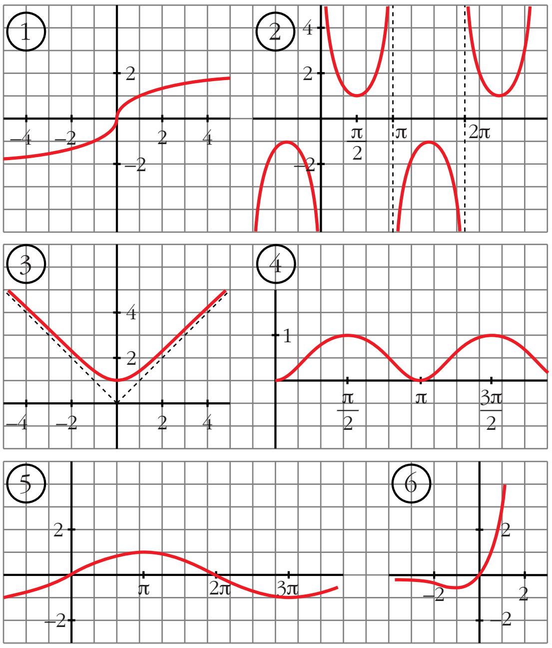


43. **Estudia el domini de definició, les asímptotes i els extrems de cada una de les funcions següents i, amb aquesta informació, tracta de trobar-ne la gràfica entre les que estan representades a continuació:**

a) $y = \dfrac{1}{\sin x}$ **b)** $y = x\,e^{x}$

c) $y = \sin \dfrac{x}{2}$ **d)** $y = \sqrt[3]{x}$

e) $y = \sqrt{x^2 + 1}$ **f)** $y = \sin^2 x$



a) $y = \dfrac{1}{\sin x}$

- **Domini:**

  $\sin x = 0 \quad \to \quad x = 0 + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}$

  $D = \mathbb{R} - \{\pi k\}, \quad k \in \mathbb{Z}$

- **Asímptotes:**

  $x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$ són asímptotes verticals.

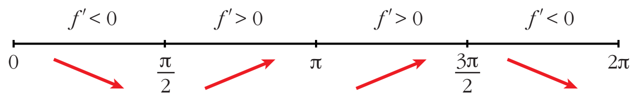
  No hi ha més asímptotes.

- **Extrems:**

  $f'(x) = \dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \cos x = 0 \begin{cases} x = \pi/2 + 2\pi k \\ x = 3\pi/2 + 2\pi k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Signe de $f'(x)$ en $(0, 2\pi)$:



$f(x)$ és periòdica de període 2π.

$f(x)$ és decreixent en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

és creixent en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

té un mínim en $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

té un màxim en $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$

- **Gràfica** $\rightarrow$ 2

b) $y = xe^x$

- **Domini:** $\mathbb{R}$
- **Asímptotes:**

No té asímptotes verticals.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -xe^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$$

$y = 0$ és asímptota horitzontal quan $x \to -\infty$ $(f(x) < 0)$.

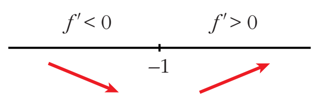
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \rightarrow \quad \text{Branca parabòlica}$$

- **Extrems:**

$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + x = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1$

Signe de $f'(x)$:



$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, -1)$

és creixent en $(-1, +\infty)$

té un mínim en $\left(-1, \frac{-1}{e}\right)$

- **Gràfica** $\rightarrow$ 6

c) $y = sin\ \dfrac{x}{2}$

- **Domini:** $\mathbb{R}$

- **Asímptotes:** No en té.

- **Extrems:**

$f'(x) = \dfrac{1}{2}\ cos\ \dfrac{x}{2}$

$f'(x) = 0 \ \rightarrow\ cos\ \dfrac{x}{2} = 0 \ \rightarrow\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \ \rightarrow\ x = \pi + 2\pi k$

$f(x)$ és periòdica de període 4π.

Signe de $f'(x)$:

$f' > 0$	$f' < 0$	$f' > 0$
0 — π	π — 3π	3π — 4π
$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$f(x)$ és creixent en $(0, \pi) \cup (3\pi, 4\pi)$

és decreixent en $(\pi, 3\pi)$

té un màxim en $(\pi, 1)$

té un mínim en $(3\pi, -1)$

- **Gràfica** $\rightarrow$ 5

d) $y = \sqrt[3]{x}$

- **Domini:** $\mathbb{R}$

- **Asímptotes:** No en té.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{ Branques parabòliques}$$

- **Extrems:**

$f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \ \rightarrow\ f(x)$ no és derivable en $x = 0$

$f'(x) > 0$ per a tot $x \neq 0$.

$f(x)$ és creixent.

- **Gràfica** $\rightarrow$ 1

e) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

- **Domini:** $\mathbb{R}$

- **Simetria:**

$f(-x) = f(x) \;\rightarrow\; f(x)$ és parell: simètrica respecte a l'eix Y.

- **Asímptotes:**

No té asímptotes verticals.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 + 1} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

$y = x$ és asímptota obliqua quan $x \to +\infty$ $(f(x) > x)$.

Per simetria:

$y = -x$ és asímptota obliqua quan $x \to -\infty$ $(f(x) > -x)$.

- **Extrems:**

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signe de $f'(x)$:

$f' < 0$ $\quad$ $f' > 0$

0

$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, 0)$

és creixent en $(0, +\infty)$

té un mínim en $(0, 1)$

- **Gràfica** $\rightarrow$ 3

f) $y = sin^2\, x$

- **Domini:** $\mathbb{R}$

- **Asímptotes:** No en té.

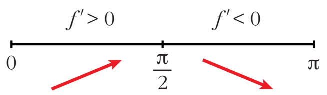
- **Extrems:**

$f'(x) = 2sin\, x\, cos\, x = sin\, 2x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; sin\, 2x = 0 \;\rightarrow\; 2x = 0 + \pi k \;\rightarrow\; x = \dfrac{\pi}{2}\, k,\;\; k \in \mathbb{Z}$

$f(x)$ és periòdica de període π.

Signe de $f'(x)$ en $(0, \pi)$:



$f(x)$ és creixent en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

és decreixent en $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$

té un màxim en $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$

té un mínim en $(0, 0)$ i un altre en $(\pi, 0)$

- **Gràfica** $\rightarrow$ 4

44. **La recta $y = 2x + 6$ és una asímptota obliqua de la funció $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x - k}$. Troba el valor de k i representa'n la funció.**

- **Trobem k:**

Si $y = 2x + 6$ és asímptota obliqua, tenim que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2; \qquad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = 6$$

Per tant:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - kx} = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2x^2 + 1}{x - k} - 2x\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 1 - 2x^2 + 2kx}{x - k} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2kx + 1}{x - k} = 2k = 6 \;\rightarrow\; k = 3$$

Així doncs: $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x - 3}$

- **Domini:** $\mathbb{R} - \{3\}$

- **Asímptotes:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 3 \text{ és asímptota vertical}$$

$y = 2x + 6$ és asímptota obliqua.

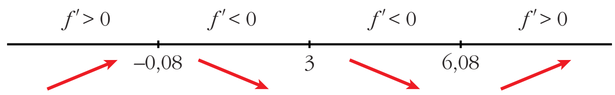
(Si $x \to -\infty$, $f(x) < 2x + 6$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 2x + 6$)

- **Punts singulars:**

$$f'(x) = \frac{4x(x-3) - (2x^2+1)}{(x-3)^2} = \frac{4x^2 - 12x - 2x^2 - 1}{(x-3)^2} = \frac{2x^2 - 12x - 1}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; 2x^2 - 12x - 1 = 0 \;\to\; x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 8}}{4} \begin{cases} x = 6{,}08 \\ x = -0{,}08 \end{cases}$$

Signe de $f'(x)$:



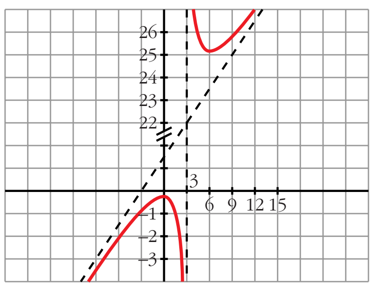
$f(x)$ és creixent en $(-\infty; -0{,}08) \cup (6{,}08; +\infty)$

és decreixent en $(-0{,}08; 3) \cup (3; 6{,}08)$

té un màxim en $(-0{,}08; -0{,}33)$

té un mínim en $(6{,}08; 24{,}32)$

- **Gràfica:**



45. **Una partícula es mou al llarg de la gràfica de la corba $y = \dfrac{2x}{1 - x^2}$ per $x > 1$.**

En el punt $P\left(2, -\dfrac{4}{3}\right)$ la deixa i es desplaça al llarg de la recta tangent a aquesta corba.

a) Troba l'equació de la tangent.

b) Si es desplaça de dreta a esquerra, troba el punt en què la partícula troba l'asímptota vertical més pròxima al punt P.

c) Si el desplaçament és d'esquerra a dreta, troba el punt en què la partícula troba l'eix OX.

a) $f'(x) = \dfrac{2(1-x^2) - 2x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \dfrac{2 - 2x^2 + 4x^2}{(1-x^2)^2} = \dfrac{2x^2 + 2}{(1-x^2)^2}$

$f'(2) = \dfrac{10}{9}$

L'equació de la recta tangent en P és:

$y = -\dfrac{4}{3} + \dfrac{10}{9}(x-2) \;\rightarrow\; y = \dfrac{10}{9}x - \dfrac{32}{9}$

b) L'asímptota vertical més propera a P és $x = 1$. Hem de trobar el punt d'intersecció de $x = 1$ amb la recta tangent anterior:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{10}{9}x - \dfrac{32}{9} \\ x = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{-22}{9} \\ x = 1 \end{array}\right\} \text{ El punt és } \left(1, \dfrac{-22}{9}\right)$$

c) Hem de trobar el punt en què la recta anterior talla l'eix OX:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{10}{9}x - \dfrac{32}{9} \\ y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \dfrac{10}{9}x = \dfrac{32}{9} \;\rightarrow\; x = \dfrac{32}{10} = \dfrac{16}{5} \\ y = 0 \end{array}\right\} \text{ El punt és } \left(\dfrac{16}{5}, 0\right)$$

46. Donada la funció $f(x) = x^2\,|x-3|$ troba:

a) Troba els punts en què f no és derivable.

b) Calcula'n els màxims i mínims.

c) Representa-la gràficament.

a) $f(x) = \left\{\begin{array}{ll} -x^2(-x+3) & \text{si } x < 3 \\ x^2(x-3) & \text{si } x \geq 3 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} -x^3 + 3x^2 & \text{si } x < 3 \\ x^3 - 3x^2 & \text{si } x \geq 3 \end{array}\right.$

– **Si $x \pm 3$, tenim que:** $f(x)$ és derivable. La seva derivada és:

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{ll} -3x^2 + 6x & \text{si } x < 3 \\ 3x^2 - 6x & \text{si } x > 3 \end{array}\right.$$

Per tant:

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = -9 \\ f'(3^+) = 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f'(3^-) \neq f'(3^+) \\ f(x) \text{ no és derivable en } x = 3 \;\; (\text{Punt } (3, 0)) \end{array}$$

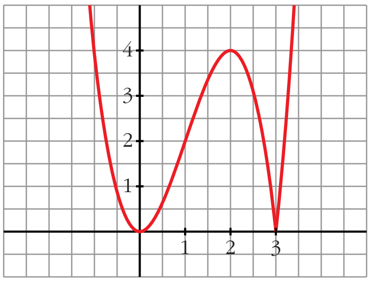
b) $f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} -3x^2 + 6x = 0 \text{ si } x < 3 \\ 3x(-x+2) = 0 \begin{array}{l} x = 0 \;\rightarrow\; (0, 0) \\ x = 2 \;\rightarrow\; (2, 4) \end{array} \\ 3x^2 - 6x = 0 \text{ si } x > 3 \;\rightarrow\; \text{cap} \end{array}\right.$

Com que $f(x) \geq 0$ per a tot x, tenim que:

$f(x)$ té un mínim en $(0, 0)$ i un altre en $(3, 0)$, i té un màxim en $(2, 4)$.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Unint totes les dades anteriors, arribem a la gràfica:



47. **Comprova que la funció $f(x) = \dfrac{|x|}{x+1}$ té dues asímptotes horitzontals diferents.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Per tant:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x}{x+1} = -1 \rightarrow y = -1$ és asímptota horitzontal quan $x \rightarrow -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1 \rightarrow y = 1$ és asímptota horitzontal quan $x \rightarrow +\infty$

48. **Donada la funció $f(x) = ax + b + \dfrac{8}{x}$, calcula a i b perquè la gràfica de f passi pel punt (–2, –6) i tingui, en aquest punt, tangent horitzontal. Per a aquest valor de a i b, representa la funció.**

$f(x) = ax + b + \dfrac{8}{x}$; $f'(x) = a - \dfrac{8}{x^2}$

- Passa per $(-2, -6) \rightarrow -2a + b - 4 = -6$
- Tangent horitzontal $\rightarrow f'(-2) = 0 \rightarrow a - 2 = 0$

$\left.\begin{array}{l} -2a + b = -2 \\ a = 2 \end{array}\right\} a = 2;\ b = 2$

Per a aquests valors, queda: $f(x) = 2x + 2 + \dfrac{8}{x}$

- **Domini:** $\mathbb{R} - \{0\}$

• **Asímptotes:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ és asímptota vertical}$$

$$f(x) = 2x + 2 + \frac{8}{x} \quad \rightarrow \quad y = 2x + 2 \text{ és asímptota obliqua}$$

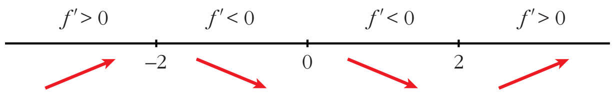
(Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 2x + 2$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 2x + 2$)

• **Punts singulars:**

$$f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2 - 8}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 4 \left\langle \begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 \end{array} \right.$$

Signe de $f'(x)$:



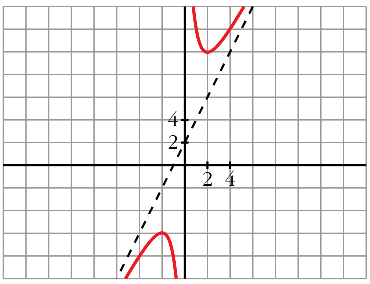
$f(x)$ és creixent en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

és decreixent en $(-2, 0) \cup (0, 2)$

té un màxim en $(-2, -6)$

té un mínim en $(2, 10)$

• **Gràfica:**



49. **Estudia i representa** $y = arc\ tg\ x$ **indicant-ne el domini, asímptotes, intervals de creixement i extrems, si n'hi hagués.**

$y = arc\ tg\ x$

• **Domini:** $\mathbb{R}$

• **Asímptotes:**

No té asímptotes.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{arc\ tg\ x}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1 + x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{arc\ tg\ x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + x^2} = 0$$

Branques parabòliques.

- **Creixement i extrems:**

  $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

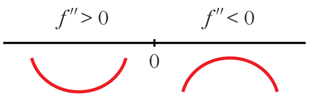
  $f'(x) > 0$ per a tot $x \rightarrow f(x)$ és creixent

  $f(x)$ no té màxims ni mínims.

- $f''(x) = \dfrac{-2x}{(1 + x^2)^2}$

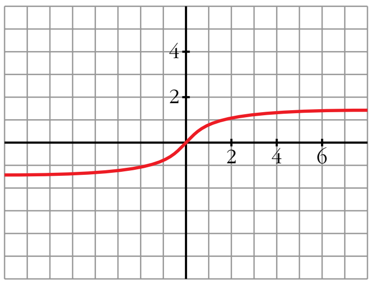
  $f''(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$

  Signe de $f''(x)$:



Hi ha un punt d'inflexió en $(0, 0)$.

- **Gràfica:**



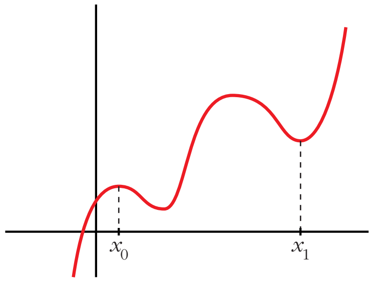
QÜESTIONS TEÒRIQUES

50. **Què podem dir del grau d'una funció polinòmica que té dos màxims i dos mínims relatius? En aquesta funció, pot estar un dels mínims més alt que el màxim?**

- Si té dos màxims i dos mínims relatius, i és polinòmica, la seva derivada té, com a mínim, quatre arrels; és a dir, $f'(x)$ serà, com a mínim, de grau 4.

  Així doncs, $f(x)$ serà, com a mínim, de grau 5.

- Sí, podria haver-hi un mínim més alt que un màxim. Per exemple:



El mínim de x_1 és més alt que el màxim de x_0.

51. **Quants punts d'inflexió pot tenir com a màxim una funció polinòmica de quart grau?**

Si $f(x)$ és un polinomi de quart grau, $f'(x)$ serà un polinomi de tercer grau i $f''(x)$ serà un polinomi de segon grau.

Així doncs, $f'(x)$ tindrà, a tot estirar, dues arrels.

Per tant, $f(x)$ tindrà, com a màxim, dos punts d'inflexió.

52. **La funció $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$ no està definida en $x = 1$ ni en $x = -1$; no obstant això, té només una asímptota vertical. Justifica aquesta informació.**

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} x = 1 \text{ és asímptota vertical}$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

En $x = -1$ hi ha una discontinuïtat evitable, no hi ha una asímptota.

53. **Quantes asímptotes verticals pot tenir una funció? I horitzontals?**

- D'asímptotes verticals, en pot tenir infinites. (Com a exemple, podem considerar la funció $y = \dfrac{1}{\sin x}$, la gràfica de la qual està representada en l'exercici **43**, és la gràfica 2).
- D'asímptotes horitzontals, en pot tenir, com a màxim, dues: una quan $x \to -\infty$ i una altra quan $x \to +\infty$.

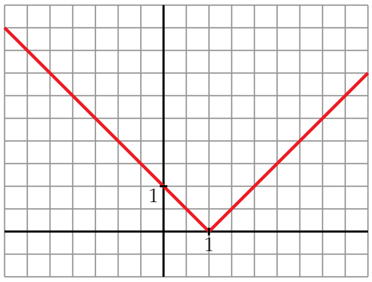
54. **Dóna un exemple d'una funció que tingui un mínim en $x = 1$ i que no sigui derivable en aquest punt. Representa-la.**

$$y = |x-1| = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x < 1 \\ x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f(x) > 0 \quad \text{per a} \quad x \neq 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{ Hi ha un mínim en } x = 1, \text{ en } (1, 0).$$

$f(x)$ no és derivable en $x = 1$, ja que $f'(1^-) = -1 \neq f'(1^+) = 1$.

La gràfica és:



55. **Dóna un exemple d'una funció que sigui derivable en $x = 1$ amb $f'(1) = 0$ i que no tingui màxim ni mínim en aquest punt.**

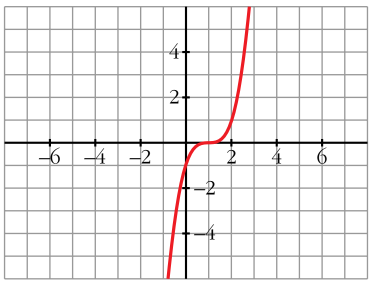
Per exemple, $y = (x - 1)^3$.

$f'(x) = 3(x - 1)^2 \rightarrow f'(1) = 0$

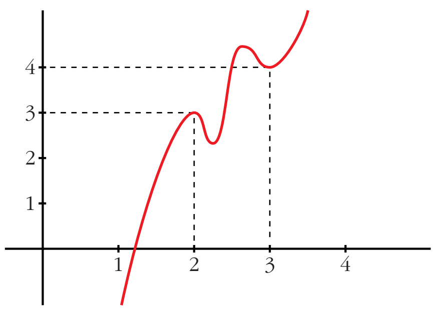
$f'(x) > 0$ per a $x \neq 1 \rightarrow f(x)$ és creixent

En $x = 1$ hi ha un punt d'inflexió.

La gràfica és:



56. **Si és possible, dibuixa una funció contínua en l'interval [0, 4] que tingui, almenys, un màxim relatiu en el punt (2, 3) i un mínim relatiu en el punt (3, 4). Si la funció fos polinòmica, quin n'hauria de ser, com a mínim, el grau?**



$f(x)$ ha de tenir, almenys, dos màxims i dos mínims en [0, 4], si és derivable.

Si $f(x)$ fos un polinomi, tindria, com a mínim, grau 5 (ja que $f'(x)$ s'anul·laria, almenys, en quatre punts).

57. **La funció $f(x) = x + e^{-x}$ té alguna asímpota? En cas afirmatiu, troba-la.**

- **Domini:** $\mathbb{R}$ $\rightarrow$ no hi ha asímptotes verticals
- **Asímptotes horitzontals:**

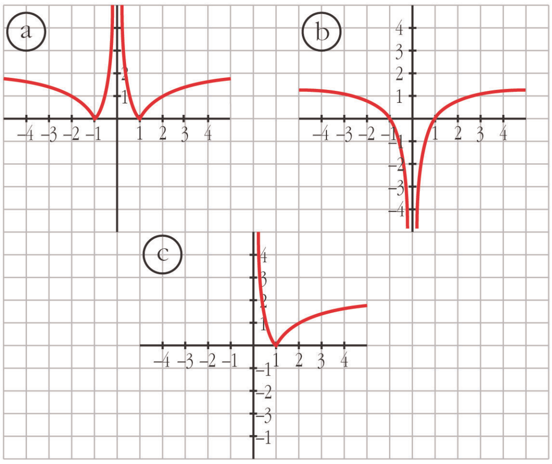
$\lim\limits_{x \to \infty} (x + e^{-x}) = \infty$ $\rightarrow$ no hi ha asímp. horitzontal quan $x \to \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x + e^{-x}) = \infty$ $\rightarrow$ no hi ha asímp. horitzontal quan $x \to -\infty$

58. **Són iguals les gràfiques de $f(x) = e^{x}$ i de $g(x) = e^{|x|}$? Justifica la teva resposta.**

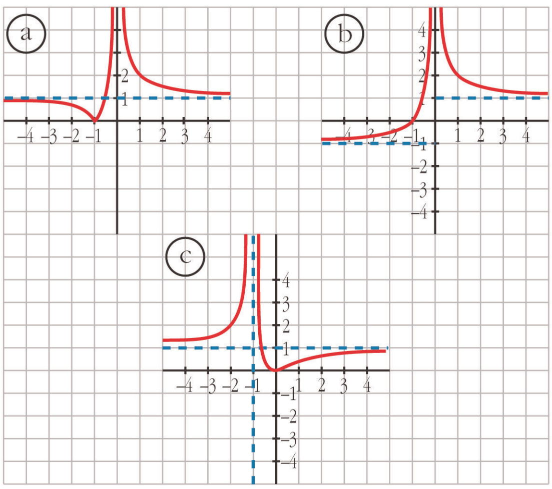
No són iguals. $f(x) = e^{|x|} = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ e^{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \neq e^{x}$

59. **Quina d'aquestes gràfiques correspon a la funció $f(x) = \ln|x|$ i quina a $g(x) = |\ln x|$?**



f(*x*) és la *b*.; *g*(*x*) és la *c*.

60. **Quina d'aquestes gràfiques correspon a la funció $f(x) = \dfrac{x+1}{|x|}$?**



f(*x*) és la *b*.

61. **Sobre la gràfica de la funció $y = |x^2 - 4|$ indica els intervals de concavitat i convexitat. Quins són els seus punts d'inflexió?**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si} \quad x < -2 \\ 4 - x^2 & \text{si} \quad -2 \le x \le 2 \\ x^2 - 4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < -2 \\ -2x & \text{si} \quad -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < -2 \\ -2 & \text{si} \quad -2 < x < 2 \\ 2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

$f(x)$ còncava si $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
$f(x)$ convexa si $x \in (-2, 2)$

Els punts on canvia la concavitat són $x = -2$ i $x = 2$.

62. **Quin tipus de simetria tenen les funcions següents?**

a) $y = sin^2\, x$ **b)** $y = |x| - 2$ **c)** $y = tg\, x$ **d)** $y = x^3 - x$

a) Simetria parell.

b) Simetria parell.

c) Simetria senar.

d) Simetria senar.

Pàgina 303

PER APROFUNDIR

63. **Representa la funció $y = x - arc\ tg\ x$ determinant-ne el domini de definició, asímptotes, màxims, mínims i intervals de creixement.**

$y = x - arc\ tg\ x$

- **Domini:** $\mathbb{R}$

- **Asímptotes:** No en té.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x - arc\ tg\ x}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left[1 - \frac{arc\ tg\ x}{x}\right] =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left[1 - \frac{1}{1 + x^2}\right] = 1 - 0 = 1 \quad \rightarrow \quad \text{Branca parabòlica}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \rightarrow \quad \text{Branca parabòlica}$$

- **Creixement, màxims i mínims:**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

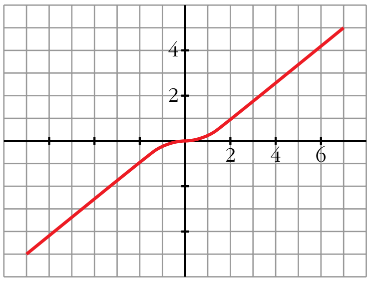
$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$

$f'(x) > 0$ per a $x \neq 0 \quad \rightarrow \quad f(x)$ és creixent

Hi ha un punt d'inflexió en $(0, 0)$.

No té màxims ni mínims.

- **Gràfica:**



64. Troba les asímptotes de les funcions següents:

a) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

b) $y = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$

c) $y = \ln(\sin x)$

d) $y = 2x + \sin 2x$

e) $y = \dfrac{\sin x}{x} + 2$

f) $y = \dfrac{\cos x}{x}$

a) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

- **Domini:**

$e^x - e^{-x} = 0 \quad \rightarrow \quad e^x = e^{-x} \quad \rightarrow \quad x = 0$

$D = \mathbb{R} - \{0\}$

- **Asímptotes:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} x = 0 \text{ és asímptota vertical}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1 \quad \rightarrow \quad y = -1$ és asímptota horitzontal quan $x \to -\infty \quad (f(x) < -1)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \quad \rightarrow \quad y = 1$ és asímptota horitzontal quan $x \to +\infty \quad (f(x) > 1)$

b) $y = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$

- **Domini:** $\mathbb{R}$
- **Asímptotes:**

No hi ha asímptotes verticals.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{1 + e^{-x}} = 0 \;\;\rightarrow\;\; y = 0$ és asímptota horitzontal quan $x \to -\infty$ $(f(x) > 0)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1 + e^{-x}} = 1 \;\;\rightarrow\;\; y = 1$ és asímptota horitzontal quan $x \to +\infty$ $(f(x) < 1)$

c) $y = ln\,(sin\,x)$

- **Domini:**

Només està definida quan $sin\,x > 0$; és a dir, en els intervals $(0, \pi) \cup (2\pi, 3\pi) \cup (4\pi, 5\pi) \cup \ldots$

El domini són tots els intervals de la forma: $\big(2k\pi, (2k+1)\pi\big)$, amb $k \in \mathbb{Z}$.

- **Asímptotes:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2k\pi^+} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to (2k+1)\pi^-} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2k\pi;\;\; x = (2k+1)\pi \\ \text{són asímptotes verticals } (k \in \mathbb{Z}) \end{array}$$

No hi ha asímptotes horitzontals ni obliqües.

(No existeix $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ni $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$).

d) $y = 2x + sin\,2x$

- **Domini:** $\mathbb{R}$
- No té asímptotes.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + sin\,2x}{x} = 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = \lim\limits_{x \to +\infty} sin\,2x$ no existeix.

(Anàleg raonament quan $x \to -\infty$).

e) $y = \dfrac{sin\,x}{x} + 2$

- **Domini:** $\mathbb{R} - \{0\}$
- **Asímptotes:**

$\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{sin\,x}{x} + 2\right] = 3.$ No té asímptotes verticals.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2 \;\;\rightarrow\;\; y = 2$ és asímptota horitzontal.

(La corba talla l'asímptota infinites vegades.)

f) $y = \dfrac{\cos x}{x}$

• **Domini:** $\mathbb{R} - \{0\}$

• **Asímptotes:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 0 \text{ és asímptota vertical}$$

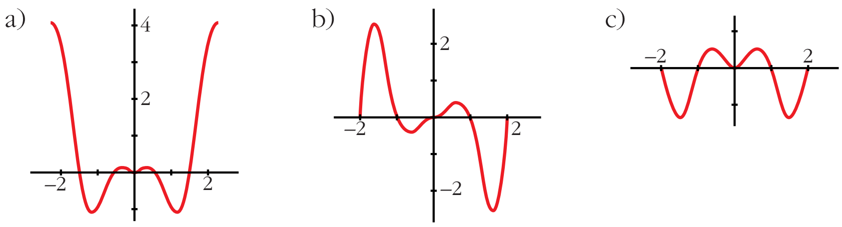
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ és asímptota horitzontal.

(La corba talla l'asímptota horitzontal infinites vegades.)

65. **Les gràfiques següents corresponen a les funcions $f(x) = x \, sin(\pi x)$; $g(x) = x^2 \, sin(\pi x)$; $h(x) = x^2 \cos(\pi x)$ en l'interval [–2, 2].**

Relaciona, de forma raonada, cada gràfica amb la seva funció corresponent.



• $f(x)$ i $h(x)$ són funcions parells i $g(x)$ és senar.

Així doncs, la gràfica de $g(x)$ ha de ser la b).

• $f(2) = 0 \;\; \rightarrow$ la gràfica de $f(x)$ és la c).

Per tant, la gràfica de $h(x)$ és la a).

• És a dir: a) $h(x)$; b) $g(x)$; c) $f(x)$

PER PENSAR UNA MICA MÉS

66. **Per trobar les asímptotes de $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ vam haver de realitzar un notable esforç (pàgines 288 i 289). No obstant això, utilitzant el sentit comú i quasi sense cap tecnicisme, podríem haver-ho resolt fàcilment. Vegem com:**

$$\sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 - 1} = \sqrt{(x-1)^2 - 1} \approx \sqrt{(x-1)^2} = |x - 1|$$

És a dir, la nostra funció, per a valors grans de $|x|$, *s'aproxima molt* a $y = |x - 1|$.

A més, és "una mica menor" (observa que es resta 1 en el radicand). La funció $y = |x - 1|$ està formada, precisament, per les dues asímptotes de la nostra funció.

a) Troba, de forma semblant, les asímptotes de:

$$y = \sqrt{x^2 + 2x} \qquad y = \sqrt{x^2 - 6x + 12}$$

b) Ídem $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$.

a) $\sqrt{x^2 + 2x} = \sqrt{x^2 + 2x + 1 - 1} = \sqrt{(x - 1)^2 - 1} \approx \sqrt{(x + 1)^2} = |x + 1|$

La funció $y = |x + 1|$ està formada per les dues asímptotes obliqües de la funció $y = \sqrt{x^2 + 2x}$.

$\sqrt{x^2 - 6x + 12} = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + 2} = \sqrt{(x - 3)^2 + 2} \approx \sqrt{(x - 3)^2} = |x - 3|$

La funció $y = |x - 3|$ està formada per les dues asímptotes obliqües de la funció $y = \sqrt{x^2 - 6x + 12}$.

b) Per a valors grans de $|x|$, tenim que:

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \approx \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Així, $y = -1$ és asímptota horitzontal quan $x \to -\infty$.

$y = -1$ és asímptota horitzontal quan $x \to +\infty$.

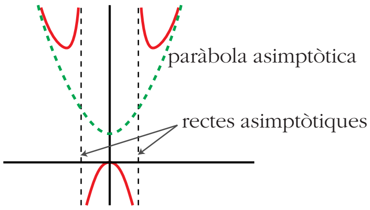
67. Encara que hem aplicat la paraula *asímptota* a rectes que s'aproximen a una gràfica, té un significat més ampli: es diu que dues corbes són *asimptòtiques* quan, en allunyar-se de l'origen, la distància entre aquestes tendeix a zero.

Per exemple, la paràbola $y = x^2 + 1$ és *asimptòtica* a la funció:

$y = f(x) = \dfrac{x^4}{x^2 - 1}$ (revisa'n la gràfica en la pàgina 286).

És fàcil comprovar-ho: $\dfrac{x^4}{x^2 - 1} = x^2 + 1 + \dfrac{1}{x^2 - 1}$ (Simplement hem efectuat el quocient.)

La diferència entre les dues funcions és $\dfrac{1}{x^2 - 1}$, que tendeix a zero quan $x \to -\infty$ i quan $x \to +\infty$. A més, agafa valors positius, per la qual cosa la corba de $y = f(x)$ queda per damunt de la paràbola. Aquest resultat permet representar la funció de forma més precisa recolzant-nos en la representació de la paràbola:



a) Raonant de la mateixa manera, troba la paràbola asimptòtica a la funció $y = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x + 8}{x}$ i determina la posició de la corba respecte a aquesta.

b) Representa la gràfica de la funció tenint en compte aquestes dades, com també l'asímptota vertical i el punt singular (només n'hi ha un d'abscissa $x = 2$).

a) $y = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x + 8}{x} = x^2 - 2x + 1 + \dfrac{8}{x}$

La paràbola és $y = x^2 - 2x + 1$.

- Quan $x \to -\infty$, la diferència entre la funció i la paràbola, $\dfrac{8}{x}$, és negativa; així doncs, la corba està per sota de la paràbola.

- Quan $x \to +\infty$, la diferència, $\dfrac{8}{x}$, és positiva; per tant, la corba està per sobre de la paràbola.

b) **Asímptota vertical:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ és asímptota vertical}$$

- **Punt singular:**

$$f'(x) = 2x - 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^3 - 2x^2 - 8}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x^3 - 2x^2 - 8 = 0 \quad \to \quad 2(x-2)(x^2 + x + 2) = 0 \quad \to \quad x = 2$$

Hi ha un mínim en $(2, 5)$.

- **Gràfica:**