UNITAT 3

DETERMINANTS

Pàgina 58

Determinants d'ordre 2

■ **Resol cada un dels següents sistemes d'equacions i calcula el determinant de la matriu dels coeficients:**

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 29 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x - 3y = 8 \\ -10x + 6y = -16 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 4x + y = 17 \\ 5x + 2y = 19 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 9x - 6y = 7 \\ -6x + 4y = 11 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 18x + 24y = 6 \\ 15x + 20y = 5 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 3x + 11y = 128 \\ 8x - 7y = 46 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 29 \\ 3x - y = 5 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$

Solució: $x = 4, \ y = 7$

b) $\left.\begin{array}{l} 5x - 3y = 8 \\ -10x + 6y = -16 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -10 & 6 \end{vmatrix} = 0$. *Solució:* $x = \frac{8}{5} + \frac{3}{5}\lambda, \ y = \lambda$

c) $\left.\begin{array}{l} 4x + y = 17 \\ 5x + 2y = 19 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

Solució: $x = 5, \ y = -3$

d) $\left.\begin{array}{l} 9x - 6y = 7 \\ -6x + 4y = 11 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 0$. *Incompatible*

e) $\left.\begin{array}{l} 18x + 24y = 6 \\ 15x + 20y = 5 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 18 & 24 \\ 15 & 20 \end{vmatrix} = 0$

Solució: $x = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\lambda, \ y = \lambda$

f) $\left.\begin{array}{l} 3x + 11y = 128 \\ 8x - 7y = 46 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = -109 \neq 0$. *Solució:* $x = \frac{1402}{109}, \ y = \frac{886}{109}$

Pàgina 59

Determinants d'ordre 3

- **Volem calcular tots els possibles productes (de tres factors) en els quals intervinguin un element de cada fila i un de cada columna d'aquesta matriu:**

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Esbrina quants productes hi ha i calcula'ls tots.

b) Fes-ho de nou per a una matriu 3 × 3 qualsevol.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

a) Hi ha 6 productes:

$6 \cdot 5 \cdot 1 = 30$ $\quad$ $3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$

$2 \cdot 7 \cdot 3 = 42$ $\quad$ $7 \cdot 8 \cdot 6 = 336$

$9 \cdot 8 \cdot 4 = 288$ $\quad$ $2 \cdot 9 \cdot 1 = 18$

b)

$a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$ $\quad$ $a_{13}\, a_{22}\, a_{31}$

$a_{13}\, a_{21}\, a_{32}$ $\quad$ $a_{11}\, a_{23}\, a_{32}$

$a_{12}\, a_{23}\, a_{31}$ $\quad$ $a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$

Determinants d'ordre 4

- **En una matriu 4 × 4, quants productes de 4 factors hi ha en els quals intervinguin un element de cada fila i un de cada columna?**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Hi ha $4! = 24$ productes.

Determinants d'ordre n

- **Sabries dir, en general, en una matriu quadrada $n \times n$, quants productes de n factors, un de cada fila i un de cada columna, poden donar-se?**

Hi ha $n!$ productes.

Pàgina 62

1. Calcula el valor dels determinants següents i digues per què són zero alguns d'aquests:

a) $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 0 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 21 & 77 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} -140 & 7 \\ 60 & -3 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2$ $\qquad$ b) $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -50$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 0 \end{vmatrix} = 0$, perquè té una columna de zeros.

d) $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = 0$, perquè té les dues files iguals.

e) $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 21 & 77 \end{vmatrix} = 0$, perquè les seves files són proporcionals: (1a) · 7 = (2a)

f) $\begin{vmatrix} -140 & 7 \\ 60 & -3 \end{vmatrix} = 0$, perquè les seves dues columnes són proporcionals: (2a) · (–20) = (1a)

2. Calcula el valor dels determinants següents tenint en compte aquestes dades:

$$A = \begin{pmatrix} l & m \\ n & p \end{pmatrix} \qquad |A| = -13$$

a) $\begin{vmatrix} n & p \\ l & m \end{vmatrix}$ **b)** $|6A|$ **c)** $\begin{vmatrix} l & 4m \\ n & 4p \end{vmatrix}$ **d)** $|A^{-1}|$

a) $\begin{vmatrix} n & p \\ l & m \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = -(-13) = 13$

b) $|6A| = \begin{vmatrix} 6l & 6m \\ 6n & 6p \end{vmatrix} = 6 \cdot 6 \begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = 36 \cdot (-13) = -468$

c) $\begin{vmatrix} l & 4m \\ n & 4p \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = 4 \cdot (-13) = -52$

d) $|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \quad \to \quad |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{-13} = -\dfrac{1}{13}$

Pàgina 63

3. Calcula els determinants següents:

a) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -114$ b) $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$

4. Troba el valor d'aquests determinants:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 14$ b) $\begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1\,000$

Pàgina 65

5. Justifica, sense desenvolupar, aquestes igualtats:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \\ -8 & -2 & -14 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \\ 27 & 94 & 71 \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} 45 & 11 & 10 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

a) Té una fila de zeros (propietat 2).

b) La 3a fila és proporcional a la 1a (3a = (–2) · 1a) (propietat 6).

c) La 3a fila és combinació lineal de les dues primeres (3a = 1a + 10 · 2a) (propietat 9).

d) La 1a fila és combinació lineal de les altres dues (1a = 10 · 2a + 3a) (propietat 9).

6. Tenint en compte el resultat del determinant que et donem, calcula la resta sense desenvolupar:

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 = 3$

b) $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \dfrac{1}{5} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 = 1$

c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Pàgina 66

7. Justifica que els determinants següents:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 27 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & -1 & 36 \\ 0 & 6 & 2 & 54 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 612 & 704 & 410 & 103 \\ 6 & 7 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

valen: a) 0, b) 0, c) 96 o –96, d) 1 o –1

a) La 4a columna és proporcional a la 2a (4a = 9 · 2a), per tant el determinant val 0 (propietat 6).

b) La 3a fila és combinació lineal de les altres tres (3a = 100 · 4a + 10 · 1a + 2a), per tant el determinant és 0 (propietat 9).

c) $4 \cdot 8 \cdot 1 \cdot (-3) = -96$; aquest és l'únic producte possible diferent de zero. Per tant, el determinant valdrà 96 o –96, segons el signe que li correspongui a aquest producte.

d) $1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 = -1$ és l'únic producte possible diferent de zero. Per tant, el determinant valdrà 1 o –1, segons el signe que li correspongui a aquest producte.

Pàgina 67

8. Troba dos menors d'ordre dos i dos menors d'ordre tres de la matriu:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Menors d'ordre dos; per exemple:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4$$

Menors d'ordre tres; per exemple:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 68, \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 21$$

9. Troba el menor complementari i l'adjunt dels elements a_{12}, a_{33} i a_{43}:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \alpha_{12} = -1 \cdot (-2) = 2$$

$$\alpha_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 108; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \alpha_{33} = 1 \cdot 108 = 108$$

$$\alpha_{43} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 16; \quad A_{43} = (-1)^{4+3} \cdot \alpha_{43} = -1 \cdot 16 = -16$$

Página 69

10. **Calcula el determinant següent aplicant-hi la regla de Sarrus i desenvolupa'l per cada una de les seves files i cada una de les seves columnes:**

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

Comprova que s'obté el mateix resultat en els set casos.

Aplicant la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 4 + (-5) \cdot 8 \cdot (-1) + 7 \cdot 6 \cdot 9 - (-1) \cdot 2 \cdot 9 - 6 \cdot 8 \cdot 3 - 7 \cdot (-5) \cdot 4 = 456$$

Desenvolupant per la 1a fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-40) - 7 \cdot (-74) - 1 \cdot (-58) =$$

$$= -120 + 518 + 58 = 456$$

Desenvolupant per la 2a fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 36 + 2 \cdot 21 - 6 \cdot (-39) =$$

$$= 180 + 42 + 234 = 456$$

Desenvolupant per la 3a fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot 44 - 8 \cdot 13 + 4 \cdot 41 =$$

$$= 396 - 104 + 164 = 456$$

Desenvolupant per la 1a columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-40) + 5 \cdot 36 + 9 \cdot 44 =$$

$$= -120 + 180 + 396 = 456$$

Desenvolupant per la 2a columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = -7 \cdot (-74) + 2 \cdot 21 - 8 \cdot 13 =$$

$$= 518 + 42 - 104 = 456$$

Desenvolupant per la 3a columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-58) - 6 \cdot (-39) + 4 \cdot 41 =$$

$$= 58 + 234 + 164 = 456$$

11. **Donada la matriu** $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{7} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{2} & \mathbf{6} \\ \mathbf{9} & \mathbf{8} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$**:**

a) Troba la suma dels productes de cada element de la 1a fila pel corresponent adjunt de la 3a fila.

b) Troba la suma dels productes de cada element de la 3a columna per l'adjunt dels corresponents elements de la 2a columna.

c) Justifica per què els dos resultats anteriors són zero.

a) $a_{11} \cdot A_{31} + a_{12} \cdot A_{32} + a_{13} \cdot A_{33} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 3 \cdot 44 - 7 \cdot 13 - 1 \cdot 41 = 132 - 91 - 41 = 0$

b) $a_{13} \cdot A_{12} + a_{23} \cdot A_{22} + a_{33} \cdot A_{32} = -1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} =$

$= 1 \cdot (-74) + 6 \cdot 21 - 4 \cdot 13 = -74 + 126 - 52 = 0$

c) Per la propietat 12.

12. **Calcula els determinants següents:**

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{7} \\ \mathbf{3} & \mathbf{7} & \mathbf{6} & \mathbf{9} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{9} \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{8} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -7 \begin{vmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -7 \cdot 290 = -2\,030$

(1) Desenvolupant per la 2a columna.

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 28 + 2 \cdot 28 = 0$

(1) Desenvolupant per la 4a fila.

També podríem haver observat que la 4a columna és igual a la suma de les altres tres; i, per tant, el determinant val zero.

c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-12) - 4 \cdot (-2) = -36 + 8 = -28$

(1) Desenvolupant per la 1a fila.

d) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 8 & 6 & 7 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 83$

(1) Desenvolupant per la 4a columna.

Pàgina 70

13. **Calcula els determinants següents:**

a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ 6 & 2 & 8 & 0 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 8 & 27 \\ 1 & 5 & 3 & 12 \\ 5 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ 6 & 2 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \xrightarrow{\begin{array}{l} \text{COLUMNES} \\ 1a - 3 \cdot 2a \\ 2a \\ 3a - 4 \cdot 2a \\ 4a \end{array}} \begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 & 1 \\ 17 & -5 & 23 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 17 & 23 & 6 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} =$

$= 2 \cdot 145 = 290$

(1) Desenvolupant per la 4a fila.

b) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 8 & 27 \\ 1 & 5 & 3 & 12 \\ 5 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \xrightarrow{\begin{array}{l} \text{COLUMNES} \\ 1a - 5 \cdot 2a \\ 2a \\ 3a \\ 4a - 6 \cdot 2a \end{array}} \begin{vmatrix} 28 & -5 & 2 & 32 \\ -31 & 7 & 8 & -15 \\ -24 & 5 & 3 & -18 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 28 & 2 & 32 \\ -31 & 8 & -15 \\ -24 & 3 & -18 \end{vmatrix} = 0$

(1) Desenvolupant per la 4a fila.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \xrightarrow{\begin{array}{l} \text{FILES} \\ 1a \\ 2a \\ 3a + 2a \\ 4a \\ 5a + 2a \end{array}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 5 \end{vmatrix} =$

$$= \overset{\text{FILES}}{\boxed{\begin{array}{l} 1a - 3 \cdot 2a \\ 2a \\ 3a \\ 4a + 2a \end{array}}} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -8 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 9 \end{vmatrix} = -16$$

d) $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \overset{\text{FILES}}{\boxed{\begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a \\ 4 \cdot 3a + 4a \end{array}}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ -8 & 0 & 2 & 13 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -8 & 2 & 13 \end{vmatrix} =$$

$$= \overset{\text{COLUMNES}}{\boxed{\begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ (-2) \cdot 2a + 3a \end{array}}} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ -8 & 2 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} = 27 - 16 = 9$$

Pàgina 72

14. Calcula el rang de les matrius següents:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{8} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{5} \\ \mathbf{6} & \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{12} & \mathbf{8} \\ \mathbf{12} & \mathbf{10} & \mathbf{6} & \mathbf{23} & \mathbf{16} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{-7} \\ \mathbf{7} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{-8} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Agafem un menor d'ordre 2 diferent de zero: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$.

Per tant, les dues primeres files són linealment independents.

Observem que la 3a fila és la suma de les dues primeres, i que la 4a fila és la suma de la 2a i la 3a. Per tant, *ran* $(A) = 2$.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 6 & 23 & 16 \end{pmatrix}$$

Agafem un menor d'ordre 2 diferent de zero: $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$. Per tant, les dues primeres files són linealment independents.

Vegem si la tercera fila depèn linealment de les anteriors:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \quad \to \quad \text{Les 3 primeres files són linealment independents.}$$

Vegem si la 4a fila depèn linealment de les anteriors:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 12 \\ 12 & 10 & 6 & 23 \end{vmatrix} = 0 \;\text{ i }\; \begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 23 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

Per tant, $ran\,(B) = 3$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Agafem un menor d'ordre 2 diferent de zero: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Per tant, les dues primeres files són linealment independents.

Com que $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, les tres primeres files són linealment independents.

Com que $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, per tant $ran\,(C) = 4$.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -3 & -7 \\ 7 & 2 & -3 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Agafem un menor d'ordre 2 diferent de zero: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Per tant, les dues primeres files són linealment independents.

Com que $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$, la primera fila, la segona i la quarta són linealment independents.

La tercera fila és la suma de les dues primeres. Per tant, $ran\,(D) = 3$.

Pàgina 77

EXERCICIS I PROBLEMES PROPOSATS

PER PRACTICAR

15. **Calcula el valor d'aquests determinants:**

a) $\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 15 & 8 \\ -9 & -4 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 1$ b) $\begin{vmatrix} 15 & 8 \\ -9 & -4 \end{vmatrix} = 12$ c) $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -25$

d) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 10$ e) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 14$ f) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2$

16. **Resol aquestes equacions:**

a) $\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 12$ **b)** $\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 0$

a) $\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 12$

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = (1+x)^2 - (1-x)^2 = 1 + x^2 + 2x - (1 + x^2 - 2x) =$$

$$= 1 + x^2 + 2x - 1 - x^2 + 2x = 4x = 12 \quad \to \quad x = 3$$

b) $\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = x^2 \cdot (x-2) - x(1-2x) = x^3 - 2x^2 - x + 2x^2 = x^3 - x =$$

$$= x(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

17. Troba els valors de a que anul·len cada un dels determinants següents:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix}$

☛ ***Desenvolupa, iguala a 0 i resol l'equació que obtinguis.***

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = -3a + 5 + 4 - 5 + 3 - 4a = 7 - 7a = 0 \;\rightarrow\; a = 1$

b) $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3(a-1) + (a-1)(a+6) - 6(a-1) = (a-1)[3 + a + 6 - 6] =$

$= (a-1)(3+a) = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -3 \end{cases}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix} = 4a^2 + 4 - 4 - 12 = 4a^2 - 12 = 0 \;\rightarrow\; a^2 = 3 \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ a = -\sqrt{3} \end{cases}$

d) $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 4(a+1) + a + a - 2 - a^2(a+1) - 2 =$

$= 4a + 4 + 2a - 2 - a^3 - a^2 - 2 = -a^3 - a^2 + 6a = -a(a^2 + a - 6) = 0 \;\rightarrow$

$\begin{cases} a = 0 \\ a^2 + a - 6 = 0 \;\rightarrow\; a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} a = 2 \\ a = -3 \end{cases} \end{cases}$

18. De les següents operacions amb determinants d'ordre 2 × 2, assenyala les que són correctes i, si cal, enuncia les propietats que s'hi utilitzen:

a) $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 2a & a-b \\ 2b & b \end{vmatrix} = 2b\begin{vmatrix} a & a-b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

a) Correcte. Té les dues columnes iguals.

b) Correcte. Si una fila està multiplicada per un nombre, el determinant queda multiplicat per aquest nombre.

c) Incorrecte; seria $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$.

d) Correcte.

$\begin{vmatrix} 2a & a-b \\ 2b & b \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & a-b \\ b & b \end{vmatrix} = 2b\begin{vmatrix} a & a-b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

19. **Si $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$, quin és el valor de cada un d'aquests determinants? Justifica les respostes:**

a) $\begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$

b) $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} -\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -(-5) = 5$

c) $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix} \underset{(4)}{=} -3\begin{vmatrix} n & m \\ q & p \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} 3\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) = -15$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix} \underset{(4)}{=} 2\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} 2\begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} -2\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -2 \cdot (-5) = 10$

e) $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix} \underset{(4)}{=} \dfrac{1}{m} \cdot m \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$

f) $\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix} = 0$, ja que les dues columnes són proporcionals.

(1) Si a una fila li sumem una altra multiplicada per un nombre, el determinant no varia.

(2) El determinant d'una matriu coincideix amb el de la seva transposada.

(3) Si canviem d'ordre dues files o dues columnes, el determinant canvia de signe.

(4) Si multipliquem una fila o una columna per un nombre, el determinant queda multiplicat per aquest nombre.

20. **Substitueix els punts suspensius pels nombres adequats perquè es verifiquin les igualtats següents:**

a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & 7 \\ \dots & -3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -10 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

21. **Si sabem que** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$**, calcula el valor dels determinants següents:**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} = 1/2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 1/2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + 1/2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 7 & 7 \\ x & y & z \end{vmatrix} =$

$= 1/2 \cdot 5 + 1/2 \cdot 0 = 5/2$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$

c) $\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 = 10$

22. **Calcula el valor dels determinants següents:**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -72$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -18$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix} = 938$

23. Troba el rang de les matrius següents:

a) $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

c) $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **d)** $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

a) $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Agafem un menor d'ordre 2 diferent de zero: $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow ran\,(C) \geq 2.$

Les dues últimes files són linealment independents.

Vegem si la 2a fila depèn linealment de les dues últimes:

$$\begin{vmatrix} 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$ La 2a fila depèn linealment de les dues últimes.

Vegem si la 1a fila depèn de les dues últimes:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 10 \neq 0.$$ Per tant, $ran\,(C) = 3$.

b) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Agafem un menor d'ordre 2 diferent de zero: $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$

Les dues primeres columnes són linealment independents. Per tant $ran\,(D) \geq 2$.

Vegem si la 3a columna depèn linealment de les dues primeres:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$ Per tant, $ran\,(D) = 3$.

c) $|M| = 2$ rang $M = 4$

d) $2 \cdot$ (1a fila) + 3 (2a fila) = (3a fila)

tots els determinants 3×3 sean zero.

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow$ rang $N = 2$

24. **Estudia el rang de les matrius següents segons el valor del paràmetre que hi apareix:**

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 2a & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ **e)** $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ **f)** $F = \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a-1 \end{vmatrix}$

a) $|A| = 2a - 2 + 4 - a = a - 2$

Si $a \neq 2 \;\rightarrow\;$ rang $A = 3$

Si $a = 2 \;\rightarrow\; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \;\rightarrow\;$ rang $A = 2$

b) $|B| = 4a^2 - 2 - 2a + 2 = 4a^2 - 2a$

$4a^2 - 2a = 0$

$2a(2a - 1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1/2 \end{cases}$

Si $a \neq 0$ i $a \neq 1/2 \;\rightarrow\;$ rang $B = 3$

Si $a = 0$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \;\rightarrow\;$ rang $B = 2$

Si $a = 1/2$

$B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1/2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \;\rightarrow\;$ rang $B = 2$

c) $|C| = 12 - 12 - a^2 - 9a + 8 + 2a = -a^2 - 7a + 8$

$-a^2 - 7a + 8 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -8 \end{cases}$

Si $a \neq 1$ i $a \neq -8 \;\rightarrow\;$ rang $C = 3$

Si $a = 1$

$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \;\rightarrow\;$ rang $C = 2$

Si $a = -8$

$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -8 \\ -8 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \;\rightarrow\;$ rang $C = 2$

d) $|D| = -a^2 + 1 + 1 + a - 1 - a = -a^2 + 1$

$$-a^2 + 1 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

Si $a \neq \pm 1 \rightarrow$ rang $D = 3$

Si $a = 1$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{rang } D = 2$$

Si $a = -1$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{rang } D = 2$$

e) $|E| = (-1)^2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^4 \cdot a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 8 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} +$

$+ (-1)^5 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 8 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -5 - (-6) + a(-8) - (-15) = 16 - 8a.$

$16 - 8a = 0 \rightarrow a = 2$

Si $a \neq 2 \rightarrow$ rang $E = 4$

Si $a = 2$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 8 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{rang } E = 3$$

f) $|F_1| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -a & 2a - 1 \end{vmatrix} = -2a + 1 + a = 1 - a \rightarrow$ s'anul·la per $a = 1$.

$|F_2| = \begin{vmatrix} -a & 1 \\ -1 & 2a - 1 \end{vmatrix} = 2a^2 - a - 1 \rightarrow$ s'anul·la per $a = 1$ i $a = -1/2$.

$|F_3| = \begin{vmatrix} -a & -1 \\ -1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 1 \rightarrow$ s'anul·la per $a = \pm 1$.

L'únic valor comú és $a = 1$.

Si $a \neq 1 \rightarrow$ rang $F = 2$

Si $a = 1$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rang } F = 1$$

Pàgina 78

PER RESOLDRE

25. **Justifica, sense desenvolupar, que els determinants següents són nuls:**

a) $\begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2/5 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$

a) La 1a i la 3a columnes són proporcionals (la 3a és –5 per la 1a).

b) Sumem la 3a fila a la 2a:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} =$$

$$= 5(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = 0 \text{ (ja que té dues files iguals).}$$

26. **Per a quins valors de a s'anul·la aquest determinant?** $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

Calcula el rang de la matriu A en els casos següents:

$a = 1$ $a = 0$ $a = 2$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{1a} \\ \text{2a} - 2 \cdot \text{1a} \\ \text{3a} + \text{1a} \\ \text{4a} + \text{1a} \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -5 & 4 \\ a+1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -5 & 4 \\ a+1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$= -[8(a+1) - 30 + 6] = -[8a + 8 - 30 + 6] = -(8a - 16) = 0 \rightarrow a = 2$

Per tant:

- **Si $a = 1$** $\rightarrow$ $|A| \neq 0$ $\rightarrow$ $ran\ (A) = 4$
- **Si $a = 0$** $\rightarrow$ $|A| \neq 0$ $\rightarrow$ $ran\ (A) = 4$
- **Si $a = 2$** $\rightarrow$ $|A| = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -15 \neq 0 \rightarrow ran\ (A) = 3$$

27. **Per a quins valors de x s'anul·len els determinants següents?**

a) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0$ **d)** $\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$

a) $$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} x \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} x \cdot x^3 - 1 = x^4 - 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x = \pm\sqrt[4]{1} \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

(1) Desenvolupem per la 1a columna.

(2) Són determinants de matrius triangulars.

b) $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILES} \\ \hline 1a \\ 2a - 1a \\ 3a - 1a \end{array} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & x-b & 0 \\ 0 & 0 & x-c \end{vmatrix} = a(x-b)(x-c) = 0 \begin{cases} x = b \\ x = c \end{cases}$$

(Suposem que $a \neq 0$.)

c) $$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 0 & 1 \\ 2-x & -x & 1 & 0 \\ 2-x & 1 & -x & 1 \\ 2-x & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} (2-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c} \text{FILES} \\ \hline 1a \\ 2a - 1a \\ 3a - 1a \\ 4a - 1a \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -x-1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -x & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -x-1 \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} \begin{vmatrix} -x-1 & 1 & -1 \\ 0 & -x & 0 \\ -1 & 1 & -x-1 \end{vmatrix} \underset{(4)}{=}$$

$$= -x \begin{vmatrix} -x-1 & -1 \\ -1 & -x-1 \end{vmatrix} = -x\,[(-x-1)^2 - 1] = -x[x^2 + 1 + 2x - 1] =$$

$$= -x(x^2 + 2x) = -x^2(x + 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

(1) Sumem a la 1a columna totes les altres.

(2) Extraiem $(2 - x)$ factor comú de la 1a columna.

(3) Desenvolupem per la 1a columna.

(4) Desenvolupem per la 2a fila.

d) $$\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 & 1 \\ 0 & -1 & x & 1 \\ 0 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} (x-1) \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ -1 & x & 1 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} =$$

$= (x-1)(x^3+1+x-x) = (x-1)(x^3+1) = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x^3+1=0 \quad \rightarrow \quad x=-1 \end{cases}$

(1) Sumem a la 1a columna la 2a.

(2) Desenvolupem per la 1a columna.

28. Determina el rang de les matrius següents segons els valors de t:

a) $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} t+3 & 4 & 0 \\ 0 & t-1 & 1 \\ -4 & -4 & t-1 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -t & 6 & 3-t & 9-t \end{pmatrix}$

e) $E = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}$ **f)** $F = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} = -t^3+1+1+t-t-t = -t^3-t+2 = (t-1)(-t^2-t-2) = 0$

$\begin{cases} t = 1 \\ -t^2-t-2=0 \quad \rightarrow \quad t^2+t+2=0 \quad \rightarrow \quad t = -\dfrac{1 \pm \sqrt{1-8}}{-2} \notin \mathbb{R}. \end{cases}$

- **Si $t = 1$**, queda:

  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; com que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\,(A) = 2$

- **Si $t \neq 1$** $\rightarrow$ $|A| \neq 0$ $\rightarrow$ $ran\,(A) = 3$

b) $|B| = \begin{vmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{vmatrix} = t^3+4t-2t-4t = t^3-2t = t(t^2-2) = 0 \begin{cases} t = 0 \\ t = \sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2} \end{cases}$

- **Si $t = 0$**, queda:

  $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Com que $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\,(B) = 2$

- **Si $t = \sqrt{2}$**, queda:

  $B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & 2 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Com que $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 2 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\,(B) = 2$

• **Si $t = -\sqrt{2}$**, queda:

$$B = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & 2 \\ 2 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}. \text{ Com que } \begin{vmatrix} -\sqrt{2} & 2 \\ 2 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \to \quad ran\,(B) = 2$$

• **Si $t \neq 0$, $t \neq \sqrt{2}$ i $t \neq -\sqrt{2}$** $\quad \to \quad |B| \neq 0 \quad \to \quad ran\,(B) = 3$

c) $$|C| = \begin{vmatrix} t+3 & 4 & 0 \\ 0 & t-1 & 1 \\ -4 & -4 & t-1 \end{vmatrix} = (t+3)\,(t-1)^2 - 16 + 4(t+3) =$$

$$= (t+3)\,(t^2 - 2t + 1) - 16 + 4t + 12 = t^3 - 2t^2 + t + 3t^2 - 6t + 3 + 4t - 4 =$$

$$= t^3 + t^2 - t - 1 = (t-1)\,(t+1)^2 = 0 \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$$

• **Si $t = 1$**, queda:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Com que } \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \quad \to \quad ran\,(C) = 2$$

• **Si $t = -1$**, queda:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}. \text{ Com que } \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \quad \to \quad ran\,(C) = 2$$

• **Si $t \neq 1$ i $t \neq -1$** $\quad \to \quad |C| \neq 0 \quad \to \quad ran\,(C) = 3$

d) $$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -t & 6 & 3-t & 9-t \end{pmatrix}$$

Observem que la 4a columna s'obté sumant la 2a i la 3a. Per tant, per trobar el rang, podem prescindir d'una d'aquestes tres columnes, per exemple de la 3a.

Veiem que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -t & 6 & 9-t \end{vmatrix} = (9-t) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (9-t)\,(-1) = t - 9 = 0 \quad \to \quad t = 9$$

• **Si $t = 9$** $\quad \to \quad$ Com que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \to \quad ran\,(D) = 2$

• **Si $t \neq 9$** $\quad \to \quad ran\,(D) = 3$

e) $$|E| = \begin{vmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{vmatrix} = t(t+1)\,(t+3) + t(t-1)\,(-2t-1) - 2t(t+3) =$$

$$= t^3 + 4t^2 + 3t - 2t^3 + t^2 + t - 2t^2 - 6t = -t^3 + 3t^2 - 2t = t(-t^2 + 3t - 2) = 0$$

$t = 0$

$$-t^2 + 3t - 2 = 0 \;\rightarrow\; t = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

• **Si $t = 0$**, queda:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Com que } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(E) = 2$$

• **Si $t = 1$**, queda:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \text{ Com que } \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(E) = 2$$

• **Si $t = 2$**, queda:

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}. \text{ Com que } \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(E) = 2$$

• **Si $t \neq 0$, $t \neq 1$ i $t \neq 2$** $\;\rightarrow\; |E| \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(E) = 3$

f) $F = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Tenim que: $\begin{vmatrix} t & 1 & 2 \\ 2 & t & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2t^2 + 4 + 2 - 4t - t - 4 =$

$$= 2t^2 - 5t + 2 = 0 \;\rightarrow\; t = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} \begin{cases} t = 2 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

• **Si $t = 2$**, queda:

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ iguals. A més, } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(F) = 2$$

• **Si $t = \frac{1}{2}$**, queda:

$$F = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1/2 & 1/4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sabem que $\begin{vmatrix} 1/2 & 1 & 2 \\ 2 & 1/2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

Veiem que $\begin{vmatrix} 1/2 & 1 & 2 \\ 2 & 1/4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(F) = 3.$

• **Si $t \neq 2$ i $t \neq \frac{1}{2}$** $\;\rightarrow\; ran\,(F) = 3$

29. Prova, sense desenvolupar, que $|A|$ és múltiple de 3 i $|B|$ és múltiple de 5:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} \qquad |B| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 12 \\ 8 & 2 & 15 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 4 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow \text{És múltiple de 3.}$$

(1) Sumem a la 3a columna les altres dues.

(2) Si una columna es multiplica per un nombre, el determinant queda multipicat per aquest nombre.

$$|B| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 10 & 10 & 15 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} 5 \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow \text{És múltiple de 5.}$$

(3) Sumem a la 3a fila la 2a.

Pàgina 79

30. Calcula el valor d'aquest determinant donant-ne el resultat factoritzat:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 3+3x & x & x & x \\ 3+3x & 3 & x & x \\ 3+3x & x & 3 & x \\ 3+3x & x & x & 3 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} (3+3x) \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & 3 & x & x \\ 1 & x & 3 & x \\ 1 & x & x & 3 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 1a \\ 3a - 1a \\ 4a - 1a \end{array}$$

$$(3+3x) \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 3-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} (3+3x) \begin{vmatrix} 3-x & 0 & 0 \\ 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} =$$

$$= (3+3x)(3-x)^3 = 3(1+x)(3-x)^3$$

(1) Sumem a la 1a columna les altres.

(2) Extraiem $(3 + 3x)$ factor comú de la 1a columna.

(3) Desenvolupem per la 1a columna.

31. **Troba, en funció de a, el valor dels determinants següents:**

$$\boldsymbol{A_1 = \begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix} \qquad A_2 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{vmatrix}}$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 4a+1 & a & a & a \\ 4a+1 & a+1 & a & a \\ 4a+1 & a & a+1 & a \\ 4a+1 & a & a & a+1 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$$

$$= (4a+1)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & a+1 & a & a \\ 1 & a & a+1 & a \\ 1 & a & a & a+1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILES} \\ \boxed{\begin{array}{l} 1a \\ 2a-1a \\ 3a-1a \\ 4a-1a \end{array}} \end{array} \Rightarrow (4a+1)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(3)}{=}$$

$$= (4a+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (4a+1) \cdot 1 = (4a+1)$$

(1) Sumem a la 1a columna les altres.

(2) Extraiem $(4a+1)$ factor comú de la 1a columna.

(3) Desenvolupem per la 1a columna.

$$A_2 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILES} \\ \boxed{\begin{array}{l} 1a \\ 2a-1a \\ 3a-1a \\ 4a-1a \end{array}} \end{array} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2-a & 0 & 0 & 0 \\ 3-a & 2-a & 0 & 0 \\ 4-a & 3-a & 2-0 & 0 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=}$$

$$= -a\begin{vmatrix} 2-a & 0 & 0 \\ 3-a & 2-a & 0 \\ 4-a & 3-a & 2-a \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} -a(2-a)^3 = a(a-2)^3$$

(1) Desenvolupem per la 4a columna.

(2) És el determinant d'una matriu triangular.

32. **Prova, sense desenvolupar-los, que el valor dels determinants següents és 0:**

a) $\boldsymbol{\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix}}$ **b)** $\boldsymbol{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+a & 2+a & 3+a & 4+a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}}$

a) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILES} \\ \boxed{\begin{array}{l} 1a \\ 2a-1a \\ 3a-1a \end{array}} \end{array} \Rightarrow \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0,$

ja que les dues últimes files són proporcionals.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+a & 2+a & 3+a & 4+a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} 0 + 0 = 0$

(1) Descomponem el determinant en suma de dos.

(2) Hi ha dues files iguals en cada un dels determinants.

33. **Estudia el rang de les matrius següents segons el valor del paràmetre que hi apareix.**

$$A = \begin{pmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ k & k & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -t & 6 & 3-t & 9-t \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 3-t & 3 & 2t \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2+t \\ t+2 & 0 & t \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & -1 \\ 1 & a+3 & 4-a & 0 \\ 1 & a+3 & a^2+2 & a+2 \end{pmatrix}$$

a) $|A| = -40$ k

$-40\,k = 0 \;\rightarrow\; k = 0$

Si $k \neq 0 \;\rightarrow\;$ rang $A = 4$

Si $k = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0 \;\rightarrow\; \text{rang } A = 3$$

b) $|B_1| = 3k - 9 \;\rightarrow\;$ s'anul·la per $k = 3$

$|B_2| = 3k + 9 \;\rightarrow\;$ s'anul·la per $k = -3$

$|B_3| = 4k + 6 \;\rightarrow\;$ s'anul·la per $k = -3/2$

$|B_4| = 6k - 18 \;\rightarrow\;$ s'anul·la per $k = 3$

Cap valor de k anul·la tots els determinants 3×3, per tant, rang $B = 3$ sigui quin sigui el valor de k.

c) $|C_1| = k^2 - 2k - 3 \;\rightarrow\;$ s'anul·la per $k = -1$ i $k = 3$

$|C_2| = k^3 - 3k - 2 \;\rightarrow\;$ s'anul·la per $k = -1$ i $k = 2$

$|C_3| = -k^2 + 1 \;\rightarrow\;$ s'anul·la per $k = -1$ i $k = 1$

$|C_4| = -k^2 + 1 \;\rightarrow\;$ s'anul·la per $k = -1$ i $k = 1$

L'únic valor que anul·la tots els determinants 3 × 3 és $k = -1$

Si $k \neq -1 \;\rightarrow\;$ rang $C = 3$

Si $k = -1$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \;\rightarrow\; \text{rang } C = 2$$

d) $|D_1| = 0$ Si $t \neq 9 \;\rightarrow\;$ rang $D = 3$

$|D_2| = -t + 9$ Si $t = 9$

$|D_3| = t - 9$

$|D_4| = t - 9$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -9 & 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \;\rightarrow\; \text{rang } D = 2$$

e) $|E_1| = -3t + 6$ Si $t \neq 2 \;\rightarrow\;$ rang $E = 3$

$|E_2| = -3t + 6$ Si $t = 2$

$|E_3| = 3t - 6$

$|E_4| = -9t + 18$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \;\rightarrow\; \text{rang } E = 2$$

f) $|F_1| = a^2 + 5a + 6 \;\rightarrow\;$ s'anul·la per $a = -3$ i $a = -2$

$|F_2| = -a^2 + 3a + 10 \;\rightarrow\;$ s'anul·la per $a = -2$ i $a = -5$

$|F_3| = a^2 + 5a + 6 \;\rightarrow\;$ s'anul·la per $a = -3$ i $a = -2$

$|F_4| = a^3 + 4a^2 + a - 6 \;\rightarrow\;$ s'anul·la per $a = -3$ i $a = -2$ $a = 1$

L'únic valor que anul·la tots els determinants 3 × 3 és $a = -2$

Si $a \neq -2 \;\rightarrow\;$ rang $F = 3$

Si $a = -2$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \;\rightarrow\; \text{rang } F = 2$$

34. Les matrius A i B tenen 3 files i 12 columnes, però, en el procés d'edició, algunes s'han esborrat.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \cdots\cdots\cdots \\ 3 & -1 & 0 & \cdots\cdots\cdots \\ -7 & 5 & -2 & \cdots\cdots\cdots \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \cdots\cdots\cdots \\ 3 & 0 & 1 & \cdots\cdots\cdots \\ 5 & 4 & 0 & \cdots\cdots\cdots \end{pmatrix}$$

Pots esbrinar alguna cosa sobre els possibles valors del seu rang?

Si anomenem C la matriu les columnes de la qual són les 24 que formen les dues matrius A i B, quin serà el rang de C?

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \dots \\ 3 & -1 & 0 & \dots \\ -7 & 5 & -2 & \dots \end{pmatrix}$. Com que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -7 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 0$, sabem que

$ran\,(A) \geq 2$. També sabem, atès que A només té 3 files, que $ran\,(A) \leq 3$. Per tant, podem afirmar que $2 \leq ran\,(A) \leq 3$; és a dir, $ran\,(A)$ podria ser 2 o 3.

- En el cas de la matriu B, tenim que:

  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \dots \\ 3 & 0 & 1 & \dots \\ 5 & 4 & 0 & \dots \end{pmatrix}$. Com que $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 23 \neq 0$, i B només té tres files,

  aleshores $ran\,(B) = 3$.

- Si C és la matriu les columnes de la qual són les 24 que formen las dues matrius A i B, pels resultats anteriors tindrem que $ran\,(C) = 3$.

35. Considera la matriu $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix}$, on a, b i c són no nuls.

a) Determina el nombre de columnes de A que són linealment independents.

b) Calcula el rang de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{vmatrix} = a\,b\,c \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = abc \cdot 0 = 0$$

Però $\begin{vmatrix} a & b \\ 2a & -b \end{vmatrix} = -ab + 2ab = ab \neq 0$, ja que a i b són no nuls.

Per tant:

a) Hi ha dues columnes en la matriu A que són linealment independents.

b) $ran\,(A) = 2$

36. Estudia el rang de la matriu següent per als distints valors de a, b i c:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} 0$$

(1) Sumem a la 2a fila la 3a.

(2) Extraiem $(a + b + c)$ factor comú de la 2a fila.

(3) Les dues primeres files són proporcionals.

Per tant, $ran\ (M) \le 2$. Tenim que:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ a & b \end{vmatrix} = 5b - 5a = 0 \;\rightarrow\; b = a \qquad \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ b & c \end{vmatrix} = 5c - 5b = 0 \;\rightarrow\; c = b$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ a & c \end{vmatrix} = 5c - 5a = 0 \;\rightarrow\; a = c$$

Per tant:

- **Si $a = b = c$** $\rightarrow$ $ran\ (M) = 1$
- **Si $a \ne b$ o $b \ne c$ o $a \ne c$** $\rightarrow$ $ran\ (M) = 2$

37. Estudia el rang de la matriu: $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

(1) Desenvolupem el determinant per la 3a fila o per la 3a columna.

Per tant, com que $|A| \ne 0$, tenim que $ran\ (A) = 3$.

38. Calcula el valor d'aquest determinant: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILES} \\ \text{1a} \\ \text{2a – 1a} \\ \text{3a} \\ \text{4a} \\ \text{5a – 1a} \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c} \text{FILES} \\ \text{1a} \\ \text{2a + 1a} \\ \text{3a + 1a} \\ \text{4a} \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILES} \\ \text{1a} \\ \text{2a} \\ \text{3a – 1a} \end{array} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} -(-2) = 2$$

(1) Desenvolupem per la 1a columna.

(2) És el determinant d'una matriu triangular.

Pàgina 80

QÜESTIONS TEÒRIQUES

39. **Quin és el valor del determinant de la matriu unitat d'ordre n?**

I el d'una matriu triangular d'ordre n?

Justifica les teves respostes.

$det\,(I_n) = 1$. El determinant d'una *matriu triangular d'ordre n* és el producte dels elements de la seva diagonal principal (ja que la resta dels productes que intervenen en l'obtenció del determinant serien zero). En el cas de la matriu unitat d'ordre n, tenim un exemple de matriu triangular en la qual els elements de la seva diagonal principal són uns. Per això, el determinant val 1.

40. **Comprova que el determinant d'una matriu d'ordre 3 és igual al de la seva transposada.**

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, aleshores $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Aplicant la definició de determinant, obtenim que $|A^t| = |A|$. Ho veiem:

$|A| = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$

$|A^t| = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$

Per tant $|A| = |A^t|$.

41. **Sabries dir quin d'aquests dos productes pot formar part del desenvolupament d'un determinant d'ordre 4?**

a) $a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{42}$ **b)** $a_{14} \cdot a_{41} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$

Només podria ser b), ja que en cada producte ha d'aparèixer un factor de cada fila i un de cada columna.

42. **Comprova que: $det\,(A \cdot B) = det\,(A) \cdot det\,(B)$ si A i B són dues matrius diagonals d'ordre 3.**

Donat: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} \end{pmatrix} \rightarrow |A \cdot B| = a_{11}\,b_{11}\,a_{22}\,b_{22}\,a_{33}\,b_{33}$$

$$\left.\begin{array}{l} |A| = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} \\ |B| = b_{11}\,b_{22}\,b_{33} \end{array}\right\} \quad |A| \cdot |B| = a_{11}\,b_{11}\,a_{22}\,b_{22}\,a_{33}\,b_{33}$$

Per tant, $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

43. **Justifica que** $\boldsymbol{det\,(A^{-1}) = \dfrac{1}{det\,(A)}}$

☛ ***Tingues en compte que:*** $\boldsymbol{A \cdot A^{-1} = I}$

Sabem que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$. Com que $A \cdot A^{-1} = I$, tenim que:

$|A| \cdot |A^{-1}| = |I|$. Però $|I| = 1$ (vegeu exercici 39). Per tant, queda:

$$|A| \cdot |A^{-1}| = 1 \quad \rightarrow \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

(Observació: $|A| \neq 0$, atès que existeix A^{-1}, per tant podem dividir entre $|A|$.)

44. **Si A és una matriu quadrada d'ordre 4, ¿pots saber el valor de**

$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} + a_{24}A_{14}$$

sense conèixer els elements de la matriu?

El resultat és 0, ja que tenim un producte dels elements d'una fila (la 2a) pels adjunts d'una altra (la 1a).

45. **Donades les matrius A i B d'ordre 4×4 amb $|A| = 3$ i $|B| = 2$, calcula: $|A^{-1}|$, $|B^t A|$ i $|(AB^{-1})^t|$.**

Justifica les respostes.

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{3} \text{ (vegeu exercici 43)}$$

$$|B^t \cdot A| \underset{(1)}{=} |B^t| \cdot |A| \underset{(2)}{=} |B| \cdot |A| = 2 \cdot 3 = 6$$

$$|(AB^{-1})^t| \underset{(2)}{=} |AB^{-1}| \underset{(1)}{=} |A| \cdot |B^{-1}| = |A| \cdot \frac{1}{|B|} = \frac{|A|}{|B|} = \frac{3}{2}$$

(1) Tenim en compte que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

(2) El determinant d'una matriu coincideix amb el de la seva transposada.

46. **D'una matriu quadrada A se sap que el seu determinant val –1, i que el determinant de 2A val –8.**

Quin és l'ordre de la matriu A? Raona la resposta.

$|2A| = -8 = -1 \cdot 8 = -1 \cdot 2^3 = 2^3 \cdot |A|$. Si tenim en compte la propietat dels determinants següents:

"Si multipliquem una fila o una columna d'una matriu per un nombre, el determinant queda multiplicat per aquest nombre"; aleshores, si A és una matriu quadrada d'ordre n:

$|2A| = 2^n \cdot |A|$. En aquest cas concret, serà $n = 3$.

És a dir, A és una matriu d'ordre 3.

47. **Escriu dues matrius A i $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ tals que:**

a) *det* $(A + B) \neq$ *det* (A) + *det* (B)

b) *det* $(A + B) =$ *det* (A) + *det* (B)

a) Per exemple: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; $A + B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$|A| = 7$; $|B| = -11$; $|A + B| = 0 \neq |A| + |B| = -4$

b) Per exemple: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

$|A| = 0$; $|B| = 0$; $|A + B| = 0 = |A| + |B|$

48. **Sigui A una matriu quadrada tal que $A^2 = A$. Demostra que *det* $(A) = 0$ o *det* $(A) = 1$.**

$|A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = |A|^2 = |A| \rightarrow |A|^2 - |A| = 0 \rightarrow$

$\rightarrow |A|(|A| - 1) = 0 \begin{cases} |A| = 0 \\ |A| = 1 \end{cases}$

(Hem tingut en compte que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.)

49. **Si A i B són dues matrius quadrades del mateix ordre, es verifica que $|A \cdot B| = |B \cdot A|$?**

Justifica la teva resposta.

Tindrem en compte que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$. Aleshores:

$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \underset{(*)}{=} |B| \cdot |A| = |B \cdot A|$. Per tant, sí que es verifica la igualtat.

(*) Malgrat que el producte de matrius no és commutatiu, el producte de nombres (els determinants són nombres) sí ho és.

50. **Si la matriu $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ m & n & p \end{pmatrix}$ té rang 2, quin rang tindrà la matriu B?**

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ m-a & n-b & p-c \end{pmatrix}$$

Observem que la 3a fila de B (la que hem afegit respecte a A), és combinació lineal de les dues primeres (s'obté restant la 2a menys la 1a). Per tant, B tindrà el mateix rang que A, és a dir, *ran* $(B) = 2$.

51. **Si anomenem c_1, c_2, c_3 els vectors columna d'una matriu A, el determinant pot designar-se així: *det* $(A) =$ *det* (c_1, c_2, c_3).**

Si *det* $(A) = 5$, quin serà el valor d'aquests determinants?

a) $\boldsymbol{det\,(c_1 - 3c_2, c_2, c_3)}$

b) $\boldsymbol{det\,(c_1, c_2, 2c_3)}$

c) $\boldsymbol{det\,(c_1, c_1 - c_2, c_3)}$

a) $det(c_1 - 3c_2,\ c_2,\ c_3) \overset{(1)}{=} det(c_1,\ c_2,\ c_3) = 5$

(1) Sumem a la 1a columna la 2a multiplicada per 3.

b) $det(c_1,\ c_2,\ 2c_3) \overset{(2)}{=} 2\ det(c_1,\ c_2,\ c_3) = 2 \cdot 5 = 10$

(2) Si multipliquem una columna d'una matriu per un nombre, el determinant queda multiplicat per aquest nombre.

c) $det(c_1,\ c_1 - c_2,\ c_3) \overset{(3)}{=} det(c_1, -c_2,\ c_3) \overset{(2)}{=} -det(c_1,\ c_2,\ c_3) = -5$

(3) Restem a la 2a columna la 1a.

52. **a) Defineix què s'anomena rang d'una matriu.**

b) Indica, raonant la resposta, quines de les afirmacions següents són certes:

I) $\boldsymbol{ran\,(A) = ran\,(-A)}$ **($-A$ és la matriu oposada de A.)**

II) $\boldsymbol{ran\,(A) = ran\,(A^t)}$ **(A^t és la matriu transposada de A.)**

III) $\boldsymbol{ran\,(A + B) = ran\,(A) + ran\,(B)}$

IV) $\boldsymbol{ran\,(A^2) = [ran\,(A)]^2}$

V) $\boldsymbol{ran\,(A) = ran\,(A^{-1})}$ **si A té inversa (A^{-1} és la matriu inversa de A.)**

a) El rang d'una matriu és el nombre de files (o de columnes) linealment independents. També podem definir-lo com el màxim ordre dels seus menors no nuls.

b) I) **Certa**. El fet de canviar de signe els elements de A, només afectarà el signe dels menors; però el màxim ordre dels menors no nuls (el rang) no es veu influït.

II) **Certa**. El nombre de files i el nombre de columnes linealment independents és el mateix. En A^t només hem canviat files per columnes.

III) **Falsa**. Per exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$ran\,(A) = ran\,(B) = 2$ (ja que $|A| \neq 0$ i $|B| \neq 0$) i $ran\,(A + B) = 1$.

IV) **Falsa**. Per exemple, si A és una matriu d'ordre 2 i amb $ran\,(A) = 2$, A^2 també serà d'ordre 2; per tant $ran\,(A^2) \leq 2$, i $[ran\,(A)]^2 = 2^2 = 4$ (si A^2 és d'ordre 2 *no* pot tenir rang 4).

V) Si A és una matriu quadrada d'ordre n, i existeix la seva inversa, aleshores $|A| \neq 0$ (i $|A^{-1}| \neq 0$). Així doncs, $ran\,(A) = ran\,(A^{-1}) = n$. Per tant, la igualtat és **certa**.

Pàgina 81

PER APROFUNDIR

53. **Demostra, sense desenvolupar el determinant, que:** $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$

Fes $c_1 - c_3$ ***i*** $c_2 - c_3$***. Així podràs treure factor comú*** $(a-b)^2$***. Després, fes*** $c_1 - 2c_2$***.***

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \xrightarrow[\substack{1a - 3a \\ 2a - 3a \\ 3a}]{\text{COLUMNES}} \begin{vmatrix} a^2 - b^2 & ab - b^2 & b^2 \\ 2a - 2b & a - b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (a+b)(a-b) & b(a-b) & b^2 \\ 2(a-b) & (a-b) & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} (a-b)^2 \begin{vmatrix} a+b & b & b^2 \\ 2 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$$

$$= (a-b)^2 \begin{vmatrix} a+b & b \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^2 (a+b-2b) = (a-b)^2 (a-b) = (a-b)^3$$

(1) Extraiem $(a-b)$ factor comú de la 1a i la 2a columnes.

(2) Desenvolupem per la 3a fila.

54. **Demostra, sense desenvolupar, que:** $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$

En el segon membre multiplica i divideix la primera fila per a***, la segona per*** b ***i la tercera per*** c***.***

Procedint tal com s'indica a l'ajuda, tenim que:

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} bca & a^2 & a^3 \\ acb & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc} \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

55. **Prova que:** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

Aquest determinant s'anomena de Vandermonde.

Fes $c_2 - c_1$ ***i*** $c_3 - c_1$***. Extreu el factor*** $(b-a)$ ***de la 2a columna i*** $(c-a)$ ***de la 3a columna.***

Seguint les indicacions donades, tenim que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2 - a^2 & c^2 - a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & (b-a) & (c-a) \\ a^2 & (b+a)(b-a) & (c+a)(c-a) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c+a-b-a) =$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)$$

56. **Determina les matrius quadrades d'ordre 2 els elements de les quals siguin nombres enters, amb determinant igual a –1, i que la seva inversa coincideixi amb la seva transposada.**

☛ ***Fes*** $A \cdot A^t = I$ ***i*** $|A| = -1$.

Hi ha 4 solucions.

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, aleshores $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Si $A^t = A^{-1}$, ha de ser:

$$A \cdot A^t = I \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} a^2+b^2=1 \\ ac+bd=0 \\ ac+bd=0 \\ c^2+d^2=1 \\ \text{Com que } |A|=-1 \;\rightarrow\; ad-bc=-1 \end{array}\right\}$$

Com que a, b, c, d són enters, només tenim quatre solucions:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

PER PENSAR UNA MICA MÉS

57. **Demostració que** $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ **per a determinants d'ordre 2:**

$$|AB| = \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \underset{(1)}{\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix}} + \underset{(2)}{\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}} + \underset{(3)}{\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix}} + \underset{(4)}{\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}}$$

a) Comprova que (1) i (4) són ambdós zero.

b) En (2) i en (3) treu factor comú els elements b_{ij}. **Arribaràs a** $|A| \cdot |B|$, **com es volia demostrar.**

a) (1) $\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} = a_{11}b_{11}a_{21}b_{12} - a_{11}b_{12}a_{21}b_{11} = a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} - a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} = 0$

$$(4)\ \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = a_{12}b_{21}a_{22}b_{22} - a_{12}b_{22}a_{22}b_{21} = a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} - a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} = 0$$

b) $(2)\ \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22}\ |A|$

$$(3)\ \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} = b_{21}b_{12} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = -b_{21}b_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -b_{21}b_{12}\ |A|$$

Per tant, queda:

$|AB| = 0 + b_{11}b_{22}\ |A| - b_{21}b_{12}\ |A| + 0 = |A|\ (b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}) =$

$= |A| \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$

58. La successió $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 5, a_5 = 8,\ldots$ té la peculiaritat que cada terme, a partir del tercer, s'obté sumant els dos anteriors:

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$$

per $n \geq 3$.

a) Demostra pel mètode d'inducció que:

$$a_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

☛ ***Comprova que $a_1 = 1$ i que $a_2 = 2$. Comprova que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, desenvolupant el determinant per la 1a columna.***

b) Tenint en compte l'anterior, digues el valor del determinant següent:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

a) $a_1 = |1| = 1;\ a_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$$a_n = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{ordre } n} \underset{(1)}{=} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{ordre } n-1} +$$

$$+ \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{ordre } n-1} \underset{(2)}{=} a_{n-1} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{ordre } n-2} = a_{n-1} + a_{n-2}$$

(1) Desenvolupem per la 1a columna.

(2) Desenvolupem el 2n determinant per la 1.ª fila.

b) El determinant donat és el terme a_8 de la successió anterior. El trobem:

$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ a_4 = 5,\ a_5 = 8,\ a_6 = 13,\ a_7 = 21,\ a_8 = 34$

Per tant:

$$a_8 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 34$$