

UNITAT 1

SISTEMES D'EQUACIONS. MÈTODE DE GAUSS

Pàgina 11

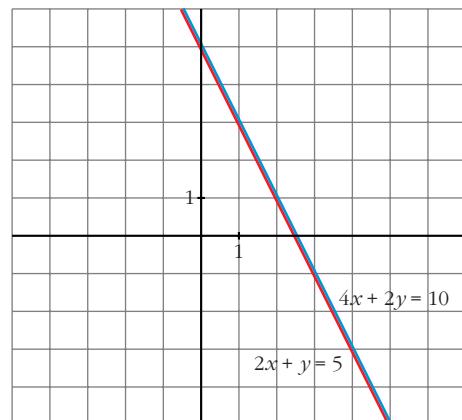
Equacions i incògnites. Sistemes d'equacions

1. Podem dir que les dues equacions següents són dues “dades diferents”? No és cert que la segona diu el mateix que la primera?

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$$

- Representa-les gràficament i observa que es tracta de la mateixa recta.

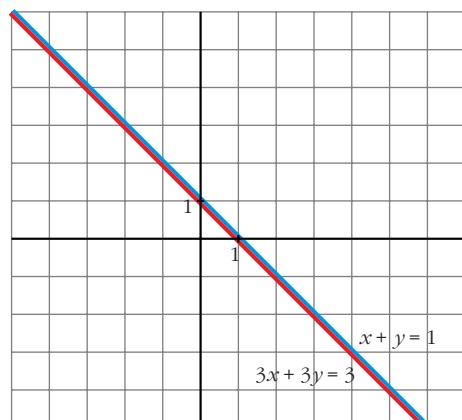
Es tracta de la mateixa recta.



- Posa un altre sistema de dues equacions amb dues incògnites en què la segona equació sigui, en essència, igual que la primera. Interpreta'l gràficament.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 3y = 3 \end{cases}$$

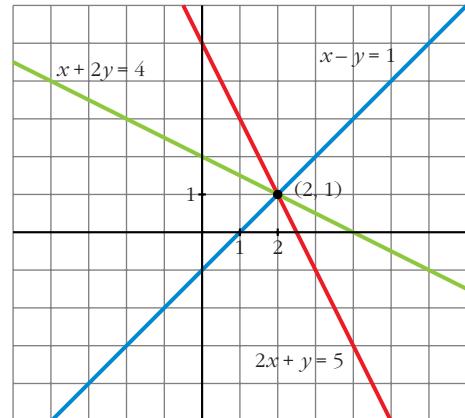
Gràficament són la mateixa recta:



2. Observa les equacions següents:

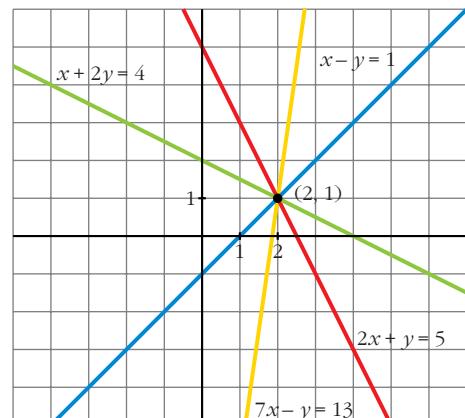
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

- Representa-les i observa que les dues primeres rectes determinen un punt (amb aquestes dues dades es responen les dues preguntes: $x = 2, y = 1$) i que la tercera recta també passa per aquest punt.



- Pensa una altra equació que també sigui “conseqüència” de les dues primeres (per exemple: $2 \cdot 1a + 3 \cdot 2a$), representa-la i observa que també passa per $x = 2, y = 1$.

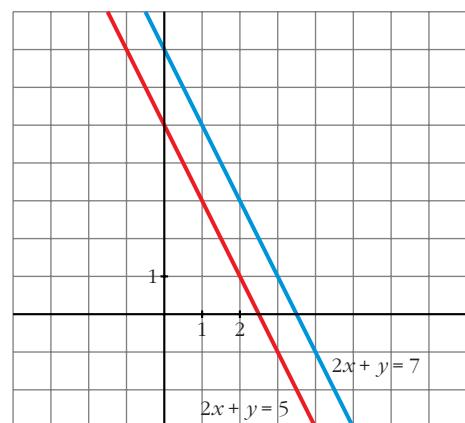
$$2 \cdot 1a + 3 \cdot 2a \rightarrow 7x - y = 13$$



3. Observa que el que diu la segona equació és contradictori amb el que diu la primera:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

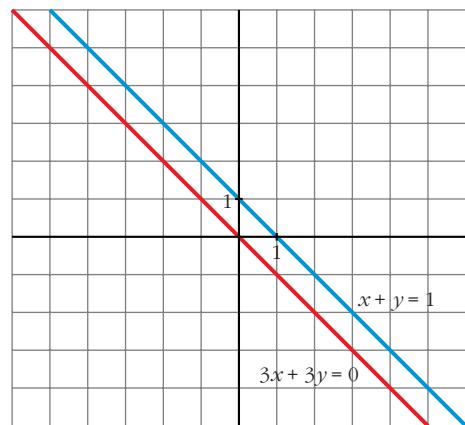
- Representa-les i observa que es tracta de dues rectes paral·leles, és a dir, no tenen solució comuna, perquè les rectes no es tallen en cap punt.



■ Modifica el terme independent de la segona equació del sistema que has inventat en l'exercici 1 i representa de nou les dues rectes.

Observa que el que diuen ambdues equacions és ara contradictori i que es representen mitjançant rectes paral·leles.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases} \quad \text{Rectes paral·leles:}$$



Pàgina 13

1. Sense resoldre'ls, explica per què són equivalents aquests sistemes:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y - z = 5 \\ x + y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z = 5 \\ x + y = 7 \\ 2x + 2y - z = 12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y - z = 11 \\ x + 2y - z = 7 \end{cases}$

- a) Hem substituït la segona equació pel resultat de sumar les dues que teníem.
- b) Hem substituït la primera equació pel resultat de restar a la segona equació la primera.
- c) En el primer sistema, la tercera equació s'obté sumant les dues primeres. La resta és igual que a b).
- d) Hem substituït la segona equació pel resultat de restar a la segona equació la primera.

Pàgina 15

2. Resol i interpreta geomètricament els sistemes següents:

a) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ 3x + 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 - 2x = 3 - x \\ y = 3 - x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 - 2x = 3 - x \\ y = 3 - (-2) = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}$

Comprovem si compleix la 2.^a equació: $3 \cdot (-2) + 2 \cdot 5 = -6 + 10 = 4$.

Solució: $x = -2$, $y = 5$. Són tres rectes que es tallen en el punt $(-2, 5)$.

b) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ La 3.^a equació s'obté sumant les dues primeres; podem prescindir-ne.

$$\begin{cases} x + y = 6 - z \\ y = 1 + z \end{cases} \quad \begin{array}{l} x = 6 - z - y = 6 - z - 1 - z = 5 - 2z \\ y = 1 + z \end{array}$$

Solució: $x = 5 - 2\lambda$, $y = 1 + \lambda$, $z = \lambda$. Són tres plans que es tallen en una recta.

c) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ Les dues primeres equacions són contradictòries.
El sistema és incompatible.
Els dos primers plans són paral·lels i el tercer els talla.

d) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} z = 1 \\ y = 1 + z = 2 \\ x = 6 - y - z = 6 - 2 - 1 = 3 \end{array}$

Solució: $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$. Són tres plans que es tallen en el punt $(3, 2, 1)$.

3. a) Resol el sistema: $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - y = 4 \end{cases}$

b) Afegeix-hi una tercera equació de manera que continui essent compatible.

c) Afegeix-hi una tercera equació de manera que sigui incompatible.

d) Interpreta geomètricament el que has fet en cada cas.

a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - y = 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x = 3 - 2y \\ x = 4 + y \end{array} \quad \begin{array}{l} 3 - 2y = 4 + y \rightarrow -1 = 3y \rightarrow y = \frac{-1}{3} \\ x = 4 + y = 4 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3} \end{array}$

$$\text{Solució: } x = \frac{11}{3}, \quad y = \frac{-1}{3}$$

b) Per exemple: $2x + y = 7$ (suma de les dues anteriors).

c) Per exemple: $2x + y = 9$.

d) En a) \rightarrow Són dues rectes que es tallen en $\left(\frac{11}{3}, \frac{-1}{3}\right)$.

En b) \rightarrow La nova recta també passa per $\left(\frac{11}{3}, \frac{-1}{3}\right)$.

En c) \rightarrow La nova recta no passa per $\left(\frac{11}{3}, \frac{-1}{3}\right)$. No existeix cap punt comú en les tres rectes. Es tallen dues a dues.

Pàgina 16

4. Reconeix com a escalonats els sistemes següents i resol-los:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x = 7 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z = 4 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x - 2t = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z + t = 4 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \\ 4x = 4 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 3x = 7 \\ x - 2y = 5 \end{cases} \left. \begin{array}{l} x = \frac{7}{3} \\ y = \frac{x-5}{2} = \frac{-4}{3} \end{array} \right\} \quad \text{Solució: } x = \frac{7}{3}, \quad y = \frac{-4}{3}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z = 4 \end{cases} \left. \begin{array}{l} 2x = 6 \\ 5x - z = 4 \\ x + y + 3z = 7 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} x = 3 \\ z = 5x - 4 = 11 \\ y = 7 - x - 3z = 7 - 3 - 33 = -29 \end{array}$$

Solució: $x = 3, \quad y = -29, \quad z = 11$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x - 2t = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z + t = 4 \end{cases} \left. \begin{array}{l} 2x = 6 + 2t \\ 5x - z = 4 - t \\ x + y + 3z = 7 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} x = 3 + t \\ z = 5x - 4 + t = 11 + 6t \\ y = 7 - x - 3z = -29 - 19t \end{array}$$

Solucions: $x = 3 + \lambda, \quad y = -29 - 19\lambda, \quad z = 11 + 6\lambda, \quad t = \lambda$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \\ 4x = 4 \end{cases} \left. \begin{array}{l} 4x = 4 \\ 2x + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} x = 1 \\ z = \frac{-2x}{3} = \frac{-2}{3} \\ y = \frac{7 - x + z}{3} = \frac{16}{9} \end{array}$$

Solució: $x = 1, \quad y = \frac{16}{9}, \quad z = \frac{-2}{3}$

5. Són escalonats aquests sistemes? Resol-los:

$$\text{a) } \begin{cases} 2y + z = 1 \\ 2y = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x - z = 4 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y + z + t = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ 2z = 2 \\ x - z + 2t = 5 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} 2y + z = 1 \\ 2y = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y = 1 \\ 2y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ z = 1 - 2y = 0 \\ x = 1 - 2y - z = 0 \end{cases}$$

Solució: $x = 0, y = \frac{1}{2}, z = 0$

$$b) \begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x - z = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 4 + z \\ x + y = 7 - z \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 + \frac{z}{2} \\ y = 7 - z - x = 5 - \frac{3z}{2} \end{cases}$$

Solucions: $x = 2 + \lambda, y = 5 - 3\lambda, z = 2\lambda$

$$c) \begin{cases} x + y + z + t = 3 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 + y \\ x + z = 3 - y - t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 + y \\ z = 3 - y - t - 2 - y = 1 - 2y - t \end{cases}$$

Solucions: $x = 2 + \lambda, y = \lambda, z = 1 - 2\lambda - \mu, t = \mu$

$$d) \begin{cases} z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ 2z = 2 \\ x - z + 2t = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 2z = 2 \\ z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ x - z + 2t = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 1 \\ t = 3 - z = 2 \\ y = 4 - 3z + 2t = 5 \\ x = 5 + z - 2t = 2 \end{cases}$$

Solució: $x = 2, y = 5, z = 1, t = 2$

Pàgina 17

6. Transforma en escalonats i resol:

$$a) \begin{cases} 2x - 3y = 21 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - y + 3z = -4 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 6 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} 2x - 3y = 21 \\ 3x + y = 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} 3 \cdot 1a - 2 \cdot 1a \\ \hline 2x - 3y = 21 \\ -11y = 55 \end{matrix}$$

Solució: $x = 3, y = -5$

$$b) \begin{cases} x - y + 3z = -4 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 6 \end{cases} \quad \begin{matrix} 1a \\ 2a - 1a \\ 3a - 1a \\ \hline x - y + 3z = -4 \\ 2y - 2z = 6 \\ 3y - 4z = 10 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1a \\ 2a : 2 \\ 3a \\ \hline x - y + 3z = -4 \\ y - z = 3 \\ 3y - 4z = 10 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x - y + 3z = -4 \\ y - z = 3 \\ -z = 1 \\ \hline z = -1 \\ y = 3 + z = 2 \\ x = -4 + y - 3z = 1 \end{matrix}$$

Solució: $x = 1, y = 2, z = -1$

7. Transforma en escalonat i resol:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 3x - 2y - 5z + 7w = -32 \\ x + 2y - z + 3w = 18 \\ x - 3y + z + 2w = -26 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 3x + y + z = 8 \end{array} \right\}$$

$$\begin{matrix} 1a \\ 2a - 1a \\ 3a - 3 \cdot 1a \end{matrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ -2y - 2z = -10 \\ -2y - 2z = -10 \end{array} \right\}$$

La 2a i la 3a files són iguals.

El sistema és compatible indeterminat

$$x = 1; y = \lambda; z = 5 - \lambda$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 3x - 2y - 5z + 7w = -32 \\ x + 2y - z + 3w = 18 \\ x - 3y + z + 2w = -26 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 1a \\ 2a - 3 \cdot 1a \\ 3a - 1a \\ 4a - 1a \end{matrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y + 3z = 0 \\ y - 14z + 7w = -32 \\ 3y - 4z + 3w = 18 \\ -2y - 2z + 2w = -26 \end{array} \right\}$$

$$\begin{matrix} 1a \\ 2a \\ 3a - 3 \cdot 2a \\ 4a + 2 \cdot 2a \end{matrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y + 3z = 0 \\ y - 14z + 7w = -32 \\ 38z - 18w = 114 \\ -30z + 16w = -90 \end{array} \right\}$$

$$\begin{matrix} 1a \\ 2a \\ 3a : 2 \\ 15 \cdot 3a + 19 \cdot 4a \end{matrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y + 3z = 0 \\ y - 14z + 7w = -32 \\ 19z - 9w = 57 \\ 34w = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} w = 0 \\ z = \frac{57 + 9w}{19} = 3 \\ y = -32 + 14z - 7w = 10 \\ x = y - 3z = 1 \end{array} \right\}$$

Solució: $x = 1, y = 10, z = 3, w = 0$

Pàgina 20

8. Resol aquests sistemes d'equacions mitjançant el mètode de Gauss:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ -2x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x - 4y + 2z = 1 \\ -2x - 3y + z = 2 \\ 5x - y + z = 5 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x - 2y = -3 \\ -2x + 3y + z = 4 \\ 2x + y - 5z = 4 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ -2x + y + 2z = 2 \end{array} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1a \\ 2a \cdot (-1) \\ 3a \cdot 5 + 2a \cdot 3 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 24 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 5y + 4z = 2 \\ 2z = 24 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} z = 3 \\ y = \frac{2 - 4z}{5} = -2 \\ x = 2 - y - z = 1 \end{array} \right\}$$

Solució: $x = 1, y = -2, z = 3$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x - 4y + 2z = 1 \\ -2x - 3y + z = 2 \\ 5x - y + z = 5 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \begin{matrix} 1a \\ 2a - 3a \\ 3a \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -7 & -2 & 0 & -9 \\ -7 & -2 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

Les dues primeres equacions són contradictòries. El sistema és *incompatible*.

$$\text{c) } \begin{cases} x - 2y = -3 \\ -2x + 3y + z = 4 \\ 2x + y - 5z = 4 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -5 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \begin{matrix} 1a \\ 2a + 2 \cdot 1a \\ 3a - 2 \cdot 1a \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1a \\ 2a \\ 3a + 5 \cdot 2a \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x - 2y = -3 \\ -y + z = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3 + 2y \\ z = -2 + y \end{cases}$$

Solucions: $x = -3 + 2\lambda$, $y = \lambda$, $z = -2 + \lambda$

9. Resol mitjançant el mètode de Gauss:

$$\text{a) } \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ -x + 3y + z = 3 \\ x + y + 5z = 7 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - y + w = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 5x - y + z + w = 0 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 2x - y + w = 9 \\ x - 2y + z = 11 \\ 5x - y + z + w = 24 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ -x + 3y + z = 3 \\ x + y + 5z = 7 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \end{array} \right) \rightarrow \begin{matrix} 1a \\ 2a + 1a \\ 3a - 1a \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2y + 3z = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 - 2z + y \\ y = \frac{5 - 3z}{2} = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3z}{2} \end{cases}$$

$$x = 2 - 2z + \frac{5}{2} - \frac{3z}{2} = \frac{9}{2} - \frac{7z}{2}$$

Solucions: $x = \frac{9}{2} - 7\lambda$, $y = \frac{5}{2} - 3\lambda$, $z = 2\lambda$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - y + w = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 5x - y + z + w = 0 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{matrix} 1a \\ 2a \\ 3a - 1a \\ 4a - 2 \cdot 1a \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{matrix} 1a \\ 2a \\ 3a + 4a \\ 4a \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x - y + w = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 4x = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \\ w = 0 \end{array} \right.$$

Solució: $x = 0, y = 0, z = 0, w = 0$

$$c) \begin{cases} 2x - y + w = 9 \\ x - 2y + z = 11 \\ 5x - y + z + w = 24 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11 \\ 5 & -1 & 1 & 1 & 24 \\ 5 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \\ 1a \\ 2a \\ 3a - 1a \\ 4a - 2 \cdot 1a \end{array} \right. \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -18 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a + 4a \\ 4a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -18 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x - y + w = 9 \\ x - 2y + z = 11 \\ 4x = -3 \\ x - z = -18 \end{cases}$$

$$x = \frac{-3}{4} \quad z = x + 18 = \frac{69}{4} \quad y = \frac{x + z - 11}{2} = \frac{11}{4} \quad w = 9 - 2x + y = \frac{53}{4}$$

$$Solució: x = \frac{-3}{4}, y = \frac{11}{4}, z = \frac{69}{4}, w = \frac{53}{4}$$

Pàgina 21

10. Discuteix, en funció del paràmetre k , aquests sistemes d'equacions:

$$a) \begin{cases} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 0 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 1 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a + 2a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k+1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a - 1a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k-3 & 0 & 0 & 3-k \end{array} \right)$$

- Si $k = 3$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y = 3 \\ 4x = 3 - 2y \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{3 - 2y}{4} = \frac{3}{4} - \frac{y}{2}$$

$$z = x - 2 + y = \frac{3 - 2y}{4} - 2 + y = \frac{-5 + 2y}{4} = \frac{-5}{4} + \frac{y}{2}$$

Sistema compatible indeterminat.

$$Solucions: x = \frac{3}{4} - \lambda, y = 2\lambda, z = \frac{-5}{4} + \lambda$$

- Si $k \neq 3$, és compatible determinat. El resolem:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y = k \\ (k-3)x = (3-k) \end{array} \right.$$

$$x = \frac{3-k}{k-3} = -1$$

$$y = \frac{k-4x}{2} = \frac{k+4}{2} = 2 + \frac{k}{2}$$

$$z = x + y - 2 = -1 + 2 + \frac{k}{2} - 2 = -1 + \frac{k}{2}$$

$$Solució: x = -1, y = 2 + \frac{k}{2}, z = -1 + \frac{k}{2}$$

$$b) \left\{ \begin{array}{l} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 0 \end{array} \right. \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1a & & & \\ 2a & & & \\ 3a - 1a & & & \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k-3 & 0 & 0 & 2-k \end{array} \right)$$

- Si $k = 3$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \text{ El sistema és incompatible.}$$

- Si $k \neq 3$, és compatible determinat. El resolem:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y = k \\ (k-3)x = (2-k) \end{array} \right.$$

$$x = \frac{2-k}{k-3}$$

$$y = \frac{k-4x}{2} = \frac{k^2+k-8}{2k-6}$$

$$z = x + y - 2 = \frac{2-k}{k-3} + \frac{k^2+k-8}{2(k-3)} - 2 = \frac{k^2-5k+8}{2k-6}$$

$$\text{Solució: } x = \frac{2-k}{k-3}, \quad y = \frac{k^2+k-8}{2k-6}, \quad z = \frac{k^2-5k+8}{2k-6}$$

11. Discuteix aquests sistemes d'equacions en funció del paràmetre k :

$$\text{a) } \begin{cases} kx + y - z = 8 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + z = k \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + kz = 1 \\ x + 2y = k \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} kx + y - z = 8 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + z = k \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1a - 2a \\ 2a \\ 3a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} k-1 & 0 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} k+3 & 0 & 0 & 8+2k \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array} \right)$$

- Si $k = -3$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \text{ Sistema } \textit{incompatible}.$$

- Si $k \neq -3$, és *compatible determinat*. El resolem:

$$\left. \begin{array}{l} (k+3)x = 8+2k \\ x+y+z=0 \\ 2x+z=k \end{array} \right\}$$

$$x = \frac{8+2k}{k+3}$$

$$z = k - 2x = \frac{k^2 - k - 16}{k+3}$$

$$y = -x - z = \frac{-k^2 - k + 8}{(k+3)}$$

$$\text{Solució: } x = \frac{8+2k}{k+3}, \quad y = \frac{-k^2 - k + 8}{(k+3)}, \quad z = \frac{k^2 - k - 16}{k+3}$$

$$\text{b) } \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ y + kz = 1 \\ x + 2y = k \end{array} \left\{ \begin{array}{c|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & 2 & 0 \end{array} \right| \begin{array}{c|c} 1 \\ 1 \\ k \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|c} 1a & \\ 2a & \\ 3a - 1a & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \left| \begin{array}{c|c} 1 \\ 1 \\ k-1 \end{array} \right. \right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|c} 1a & \\ 2a & \\ 3a - 2a & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & -1-k \end{array} \left| \begin{array}{c|c} 1 \\ 1 \\ k-2 \end{array} \right.$$

- Si $k = -1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right) \text{ Sistema } \textit{incompatible}.$$

- Si $k \neq -1$, és *compatible determinat*. El resolem:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ y + kz = 1 \\ (-1 - k)z = k - 2 \end{array} \right\}$$

$$z = \frac{k-2}{-1-k} = \frac{2-k}{1+k}$$

$$y + k \left(\frac{2-k}{1+k} \right) = 1 \rightarrow y = 1 - \frac{2k-k^2}{1+k} = \frac{1+k-2k+k^2}{1+k} = \frac{1-k+k^2}{1+k}$$

$$\begin{aligned} x = 1 - y - z &= 1 - \frac{1-k+k^2}{1+k} - \frac{2-k}{1+k} = \frac{1+k-1+k-k^2-2+k}{1+k} = \\ &= \frac{-2+3k-k^2}{1+k} \end{aligned}$$

$$\text{Solució: } x = \frac{-2+3k-k^2}{1+k}, \quad y = \frac{1-k+k^2}{1+k}, \quad z = \frac{2-k}{1+k}$$

Pàgina 26

EXERCICIS I PROBLEMES PROPOSATS

PER PRACTICAR

12. Troba, si existeix, la solució dels sistemes següents i interpreta'ls gràficament:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + y = 2 \\ x - y = 1 \\ 5x - y = 4 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - y = 3 \\ 5x + y = 8 \end{cases}$$

Els resolem pel mètode de Gauss:

$$\text{a)} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1a & 3 \cdot 2a & 2 \\ 2a & & 1 \\ 3a - 5 \cdot 2a & & 4 \\ 4a - 2 \cdot 2a & & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{array} \right)$$

Podem prescindir de les dues últimes files, ja que coincideixen amb la primera.
Quedaría:

$$4y = -1 \rightarrow y = \frac{-1}{4}$$

$$x - y = 1 \rightarrow x = 1 + y = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Solució: } \left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{4} \right)$$

El sistema representa quatre rectes que es tallen en el punt $\left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{4} \right)$.

$$\text{b)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 8 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1a & & 1 \\ 2a - 2 \cdot 1a & & 3 \\ 3a - 5 \cdot 1a & & 8 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -9 & 3 \end{array} \right)$$

De la 2a equació, obtenim $y = \frac{-1}{5}$; de la 3a equació, obtenim $y = \frac{-1}{3}$.

Per tant, el sistema és *incompatible*.

El sistema representa tres rectes que es tallen dues a dues, però no hi ha cap punt comú a les tres.

13. Comprova que aquest sistema és incompatible i raona quina és la posició relativa de les tres rectes que representa:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

Si dividim la 3a equació entre 2, obtenim: $x + 2y = 0$. La 1a equació és $x + 2y = 5$. Són contradictòries, així doncs el sistema és *incompatible*.

La 1a i la 3a equació representen dues rectes paral·leles; la 2a les talla.

14. Resol i interpreta geomètricament el sistema:

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x + y = -1 \\ (3/2)x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3/2 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1a & & 0 \\ 2a + 2 \cdot 1a & & -1 \\ (2/3)a - 3a & & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1a & & 0 \\ 2a & & -1 \\ 3a + 1a & & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} -x + 2y = 0 \\ 5y = -1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x = 2y = \frac{-2}{5} \\ y = \frac{-1}{5} \end{array} \right\}$$

Solució: $\left(\frac{-2}{5}, \frac{-1}{5} \right)$

Geomètricament, són tres rectes que es tallen en el punt $\left(\frac{-2}{5}, \frac{-1}{5} \right)$.

15. Raona si aquests sistemes tenen solució i interpreta'ls geomètricament:

a) $\left. \begin{array}{l} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 1 \end{array} \right.$

b) $\left. \begin{array}{l} -x + 3y + 6z = 3 \\ 2/3x - 2y - 4z = 2 \end{array} \right.$

a) $\left. \begin{array}{l} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 1 \end{array} \right.$ Si dividim la 2.^a equació entre 2, obtenim:

$x + 2y - z = \frac{1}{2}$, que contradiu la 1.^a.

El sistema és *incompatible*. Són dos plans paral·lels.

b) $\left. \begin{array}{l} -x + 3y + 6z = 3 \\ (2/3)x - 2y - 4z = 2 \end{array} \right.$ Si multipliquem per $-\frac{2}{3}$ la 1.^a equació, obtenim:

$\frac{2}{3}x - 2y - 4z = -2$, que contradiu la 2.^a equació.

El sistema és *incompatible*. Són dos plans paral·lels.

16. Resol els sistemes següents però reconeix prèviament que són escalonats:

a) $\left. \begin{array}{l} 2x - y = 7 \\ 11y = -69 \end{array} \right.$

b) $\left. \begin{array}{l} -y + z = 1 \\ 9z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{array} \right.$

c) $\left. \begin{array}{l} x + y - t = 2 \\ y + z = 4 \\ y + t - z = 1 \end{array} \right.$

d) $\left. \begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 2y = 1 \end{array} \right.$

a) $\left. \begin{array}{l} 2x - y = 7 \\ 11y = -69 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y = \frac{-69}{11} \\ x = \frac{7 + y}{2} = \frac{4}{11} \end{array} \right\}$

Solució: $\left(\frac{4}{11}, \frac{-69}{11} \right)$

$$\text{b)} \left. \begin{array}{l} -y + z = 1 \\ 9z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{array} \right\} \quad z = \frac{2}{9} \quad y = z - 1 = \frac{-7}{9} \quad x = \frac{3 + y - z}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Solució: } \left(\frac{2}{3}, \frac{-7}{9}, \frac{2}{9} \right)$$

$$\text{c)} \left. \begin{array}{l} x + y - t = 2 \\ y + z = 4 \\ y + t - z = 1 \end{array} \right\} \quad \begin{aligned} z &= \lambda \\ y &= 4 - z \\ t &= 1 - y + z = 1 - (4 - z) + z = -3 + 2z \\ x &= 2 - y + t = 2 - (4 - z) - 3 + 2z = -5 + 3z \end{aligned}$$

Solucions: $(-5 + 3\lambda, 4 - \lambda, \lambda, -3 + 2\lambda)$

$$\text{d)} \left. \begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 2y = 1 \end{array} \right\} \quad y = \frac{1}{2} \quad x = \frac{y}{3} = \frac{1}{6} \quad z = -2x + 3y = \frac{7}{6}$$

$$\text{Solució: } \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{7}{6} \right)$$

17. Transforma en escalonats i resol els sistemes següents:

$$\text{a)} \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 7 \\ 5x + 3y = -17 \end{array} \right. \quad \text{b)} \left\{ \begin{array}{l} -y - z = 1 \\ x - 2y - z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{array} \right.$$

$$\text{a)} \left. \begin{array}{l} 2x - y = 7 \\ 5x + 3y = -17 \end{array} \right\} \quad \boxed{5 \cdot 1a - 2 \cdot 2a} \quad \left. \begin{array}{l} 2x - 3y = 7 \\ -11y = 69 \end{array} \right\}$$

$$\text{Solució: } x = \frac{1}{6}, y = \frac{-69}{11}$$

$$\text{b)} \left. \begin{array}{l} -y - z = 1 \\ x - 2y - z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x - 2y - z = 2 \\ -y - z = 1 \\ 3x - y + z = 3 \end{array} \right\} \quad \boxed{3 \cdot 1a - 3a} \quad \left. \begin{array}{l} x - 2y - z = 2 \\ -y - z = 1 \\ -5y - 4z = 3 \end{array} \right\}$$

$$\boxed{5 \cdot 2a - 3a} \quad \left. \begin{array}{l} x - 2y - z = 2 \\ -y - z = 1 \\ -z = 2 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} -z = 2 \\ y = -1 - z \\ x = 2 + 2y + z \end{array} \right\}$$

Solució: $x = 2, y = 1, z = -2$

18. Resol aquests sistemes d'equacions lineals:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ x + 3y - 2z = -2 \\ x + z = 4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 3 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 2x + 5y = 16 \\ x + 3y - 2z = -2 \\ x + z = 4 \end{array} \right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16 \\ 1 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left[\begin{array}{l} 1a \\ 2a + 2 \cdot 3a \\ 3a \end{array} \right] \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16 \\ 3 & 3 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{l} 1a \\ 2a : 3 \\ 3a \end{array} \right] \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left[\begin{array}{l} 1a - 5 \cdot 2a \\ 2a \\ 3a \end{array} \right] \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} -3x = 6 \\ x + y = 2 \\ x + z = 4 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x = -2 \\ y = 2 - x = 4 \\ z = 4 - x = 6 \end{array} \right.$$

Solució: $(-2, 4, 6)$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 3 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left[\begin{array}{l} 3a \\ 2a \\ 1a \end{array} \right] \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{l} 1a \\ 2a - 5 \cdot 1a \\ 3a - 3 \cdot 1a \end{array} \right] \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left[\begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ -2 \cdot 3a + 2a \end{array} \right] \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ -2y - 2z = 3 \\ 2z = 1 \end{array} \right\} \quad z = \frac{1}{2} \quad y = \frac{3 + 2z}{-2} = -2 \quad x = -y - z = \frac{3}{2}$$

Solució: $\left(\frac{3}{2}, -2, \frac{1}{2}\right)$

19. Resol:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x + 4y - z = 3 \\ 6x - 6y + 2z = -16 \\ x - y + 2z = -6 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 1 \end{array} \right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left[\begin{array}{l} 1a \\ 2a - 3 \cdot 1a \\ 3a - 5 \cdot 1a \end{array} \right] \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 8 & -4 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a - 2 \cdot 2a \end{array} \right] \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ -y + 4z = -2 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}y &= 4z + 2 \\x &= 1 - y + z = 1 - (4z + 2) + z = -1 - 3z \\z &= \lambda\end{aligned}$$

Solucions: $(-1 - 3\lambda, 2 + 4\lambda, \lambda)$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 3x + 4y - z = 3 \\ 6x - 6y + 2z = -16 \\ x - y + 2z = -6 \end{array} \right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -1 & 3 \\ 6 & -6 & 2 & -16 \\ 1 & -1 & 2 & -6 \end{array} \right) \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3a & & & \\ 2a : 2 & & & \\ 1a & & & \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 3 & -3 & 1 & -8 \\ 3 & 4 & -1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1a & & & \\ 2a - 3 \cdot 1a & & & \\ 3a - 3 \cdot 1a & & & \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \\ 0 & 7 & -7 & 21 \end{array} \right) \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1a & & & \\ 2a : (-5) & & & \\ 3a : 7 & & & \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \left. \begin{array}{l} x - y + 2z = -6 \\ z = -2 \\ y - z = 3 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} y = 3 + z = 3 - 2 = 1 \\ x = -6 + y - 2z = -6 + 1 + 4 = -1 \end{array}$$

Solució: $(-1, 1, -2)$

20. Resol, si és possible, els sistemes següents:

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 9 \\ x - y - z = -10 \\ 2x - y + z = 5 \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + z = -1 \end{array} \right\}$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} -x + 2y - z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{array} \right\}$$

$$\text{d) } \left. \begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 9 \\ x - y - z = -10 \\ 2x - y + z = 5 \end{array} \right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -10 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1a & & & \\ -2a + 1a & & & \\ 3a - 2 \cdot 1a & & & \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -5 & -1 & -13 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1a & & & \\ 2a & & & \\ 2a + 2 \cdot 3a & & & \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \end{array} \right) \rightarrow \quad \left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 9 \\ 3y + 2z = 19 \\ -7y = -7 \end{array} \right\}$$

$$y = 1 \quad z = \frac{19 - 3y}{2} = 8 \quad x = 9 - 2y - z = -1$$

Solució: $(-1, 1, 8)$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + z = -1 \end{array} \right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1a & & & \\ -2a + 2 \cdot 1a & & & \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \left. \begin{array}{l} x + 2y = 3 - z \\ 5y = 7 - z \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} y = \frac{7}{5} - \frac{z}{5} \\ x = 3 - z - 2y = 3 - z - \frac{14}{5} + \frac{2z}{5} = \frac{1}{5} - \frac{3z}{5} \end{array}$$

Si fem $z = 5\lambda$, les solucions són: $\left(\frac{1}{5} - 3\lambda, \frac{7}{5} - \lambda, 5\lambda\right)$

$$\begin{array}{l} \text{c) } \left. \begin{array}{l} -x + 2y - z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{array} \right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 3a \\ 2a \\ 1a \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a + 1a \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a + 2 \cdot 3a \\ 3a \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array} \right) \end{array} \end{array}$$

La segona equació és impossible: $0x + 0y + 0z = 5$.

El sistema és *incompatible*.

$$\begin{array}{l} \text{d) } \left. \begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{array} \right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a + 1a \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \\ \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a - 2 \cdot 2a \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \end{array} \right\} \end{array}$$

$$y = 3x$$

$$z = -2x + 3y = -2x + 9x = 7x$$

$$x = \lambda$$

Solucions: $(\lambda, 3\lambda, 7\lambda)$

21. Classifica els sistemes següents en compatibles o incompatibles:

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 3 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{b) } \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{array} \right.$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 3 \\ z = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + y = 3 \\ x + y = 3 \\ z = 0 \end{array} \right\} \quad \text{Compatible indeterminat.}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{array} \right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a - 1a \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \\ \rightarrow \text{Compatible determinat.}$$

22. Estudia els sistemes següents i els resols pel mètode de Gauss:

a)
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$$

a)
$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{array} \right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -5 & 6 & 29 \end{array} \right) \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -6 & 5 & 27 \end{array} \right) \rightarrow$$

$\rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 23 & 69 \end{array} \right)$

Sistema *determinat*. Solució: $(1, -2, 3)$.

b)
$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{array} \right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2a + 1a & 3a + 1a & 0 & 0 \\ 3a - 2 \cdot 2a & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$\rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminat*.

El resolem:
$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} y = 3x \\ z = -2x + 3y = -2x + 9x = 7x \\ x = \lambda \end{array}$$

Solucions: $(\lambda, 3\lambda, 7\lambda)$

23. Estudia i resol aquests sistemes pel mètode de Gauss:

a)
$$\begin{cases} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - 3y - z = -1 \\ x + 5y + 3z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ 3x + 7y + 5z = 5 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x - y + 3z - 14t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + t = 0 \\ 3x - 3y + 5z + 6t = 0 \end{cases}$$

a)
$$\left. \begin{array}{l} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{array} \right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -7 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2a + 4 \cdot 1a & 3a + 2 \cdot 1a & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 6 & -1 & -3 \end{array} \right) \rightarrow$$

$\rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$ Sistema *compatible determinat*.

$$\text{El resolem: } \begin{cases} -x + y + 3z = -2 \\ 6y + 11z = -3 \\ z = 0 \end{cases} \quad y = -\frac{1}{2} \quad x = y + 3z + 2 = \frac{3}{2}$$

$$\text{Solució: } \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right)$$

b) $\begin{cases} x - 3y - z = -1 \\ x + 5y + 3z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ 3x + 7y + 5z = 5 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 3a \\ 2a \\ 1a \\ 4a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 1a \\ 3a - 1a \\ 4a - 3 \cdot 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a : 2 \\ 3a + 2a \\ 4a - 2a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y + z = 1 \\ y = \lambda \end{cases} \quad \begin{cases} z = 1 - 2y \\ x = 1 - y - z = y \end{cases}$$

Sistema compatible indeterminat.

Solucions: $(\lambda, \lambda, 1 - 2\lambda)$. Són quatre plans amb una recta en comú.

c) $\begin{cases} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 3a \\ 2a \\ 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a - 5 \cdot 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & -3 & 9 \\ 0 & 12 & -7 & 19 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a : 3 \\ 3a - 2 \cdot 2a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Sistema compatible determinat. El resolem:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = -3 \\ 2y - z = 3 \\ -z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} z = -1 \\ y = 1 \\ x = -3 + 2y - 2z = 1 \end{cases}$$

$$\text{Solució: } (1, 1, -1)$$

d) $\begin{cases} x - y + 3z - 14t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + t = 0 \\ 3x - 3y + 5z + 6t = 0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -14 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 6 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a - 3 \cdot 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 28 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ -4 \cdot 2a + 3 \cdot 3a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 28 & 0 \end{array} \right)$$

Sistema compatible indeterminat. El resolem:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + 3z - 14t = 0 \\ -3z + 29t = 0 \\ 28t = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} t = 0 \\ z = 0 \\ x = y \\ y = \lambda \end{array}$$

Solucions: $(\lambda, \lambda, 0, 0)$

Pàgina 27

24. Discuteix els sistemes següents i els resol-los quan sigui possible:

a) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + y/2 = -2 \\ x + ky = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{cases}$

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + y/2 = -2 \\ x + ky = 2 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1/2 & -2 \\ 1 & k & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1a & & & \\ 2 \cdot 2a + 1a & & & \\ 2 \cdot 3a - 1a & & & \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k+1 & 0 \end{array} \right)$$

• Si $k = -\frac{1}{2}$ → Sistema compatible indeterminat. El resolem:

$$2x - y = 4 \rightarrow \begin{cases} y = 2x - 4 \\ x = \lambda \end{cases} \quad \text{Solucions: } (\lambda, 2\lambda - 4)$$

• Si $k \neq -\frac{1}{2}$ → Sistema compatible determinat.

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ (2k+1)y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Solució: $(2, 0)$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1a & & & \\ 2a & & & \\ 3a & & & \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1a & & & \\ 2a - 2 \cdot 1a & & & \\ 3a - 5 \cdot 1a & & & \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & m - 15 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1a & & & \\ 2a & & & \\ 3a - 2a & & & \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & m - 10 \end{array} \right)$$

• Si $m = 10$ → Sistema compatible indeterminat. El resolem:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 5y - 3z = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{-5 + 3z}{5} = -1 + \frac{3z}{5} \\ x = 3 + 2y - z = 3 - 2 + \frac{6z}{5} - z = 1 + \frac{z}{5} \end{cases}$$

Fent $z = 5\lambda$.

Solucions: $(1 + \lambda, -1 + 3\lambda, 5\lambda)$

• Si $m \neq 10$ → Incompatible

25. Discuteix els següents sistemes d'equacions:

a)
$$\begin{cases} x - y - z = k \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + kz = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 3x + ay + 4z = 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ mx + y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

a)
$$\left. \begin{array}{l} x - y - z = k \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + kz = 0 \end{array} \right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & k \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & k & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 1a \\ 3a - 2 \cdot 1a \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & k \\ 0 & 0 & 3 & 1 - k \\ 0 & 3 & k + 2 & -2k \end{array} \right)$$

Sistema compatible determinat per a tot k .

b)
$$\left. \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 3x + ay + 4z = 0 \end{array} \right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & a & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 1a \\ 3a - 3 \cdot 1a \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & a - 3 & 7 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$\rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a : 2 \\ 3a \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a - 3 & 7 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a - 7 \cdot 2a \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a - 10 & 0 & 0 \end{array} \right)$

• Si $a = 10 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminat

• Si $a \neq 10 \rightarrow$ Sistema compatible determinat

c)
$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + z = 1 \\ mx + y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{array} \right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ m & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 3a \\ 2a \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \\ m & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$\rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a + 2 \cdot 1a \\ 3a + 1a \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & -1 \\ m + 1 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right)$

Compatible determinat per a tot m .

d)
$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{array} \right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & a & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 3a \\ 2a \\ 1a \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & a & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$\rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 5 \cdot 1a \\ 3a - 3 \cdot 1a \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & -1 & a + 3 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ -2 \cdot 3a + 2a \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 2 - 2a & 1 \end{array} \right)$

$2 - 2a = 0 \rightarrow a = 1$

• Si $a = 1 \rightarrow$ Sistema incompatible

• Si $a \neq 1 \rightarrow$ Sistema compatible determinat

26. Resol cada un dels sistemes següents per als valors de m que el fan compatible:

$$\text{a)} \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = m \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \\ x + 2y + 5z = m \end{cases}$$

$$\text{a)} \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = m \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & m \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & m-12 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m-7 \end{array} \right)$$

- Si $m = 7 \rightarrow$ Sistema compatible determinat

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = 1 \end{cases} \quad x = 3 - 2y = 1$$

Solució: $(1, 1)$

- Si $m \neq 7 \rightarrow$ Sistema incompatible

$$\text{b)} \begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \\ x + 2y + 5z = m \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & m \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & m-2 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m+1 \end{array} \right)$$

- Si $m = -1 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminat.

$$\begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 3y + 7z = -3 \end{cases} \quad \begin{aligned} y &= \frac{-3 - 7z}{3} = -1 - \frac{7z}{3} \\ x &= 2 + y + 2z = 2 - 1 - \frac{7z}{3} + 2z = 1 - \frac{z}{3} \end{aligned}$$

Fent $z = 3\lambda$:

Solucions: $(1 - \lambda, -1 - 7\lambda, 3\lambda)$

- Si $m \neq -1 \rightarrow$ Sistema incompatible

27. Discuteix i resol en funció del paràmetre:

$$\text{a)} \begin{cases} -x + my + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x - 3z = -2 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + az = 5 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} -x + my + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x - 3z = -2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & m & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} -3a \\ 2a \\ 1a \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & m & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a + 1a \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & m & 4 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ -2a \\ 3a + 2a \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & m-1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- Si $m = 1 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminat

$$\begin{cases} x + 3z = 2 \\ y + 4z = 4 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Solució: $(2 - 3\lambda, 4 - 4\lambda, \lambda)$

- Si $m \neq 1 \rightarrow$ Sistema compatible determinat

$$\begin{cases} x + 3z = 2 \\ y + 4z = 4 \\ (m-1)y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \\ x = 2 - 3z = -1 \end{cases}$$

Solució: $(-1, 0, 1)$

$$b) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + az = 5 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & a & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 3a \\ 2a \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & a & 5 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a - 3 \cdot 1a \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & a-3 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ -2a \\ 3a - 2a \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & a-2 & 2 \end{array} \right)$$

- Si $a = 2 \rightarrow$ Sistema incompatible

- Si $a \neq 2 \rightarrow$ Sistema compatible determinat. El resolem:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = -3 \\ (a-2)z = 2 \end{cases}$$

$$z = \frac{2}{a-2}$$

$$y = -3 - z = -3 - \frac{2}{a-2} = \frac{4-3a}{a-2}$$

$$x = -y - z = \frac{-4+3a}{a-2} - \frac{2}{a-2} = \frac{3a-6}{a-2}$$

Solució: $\left(\frac{3a-6}{a-2}, \frac{4-3a}{a-2}, \frac{2}{a-2} \right)$

PER RESOLDRE

28. Resol pel mètode de Gauss.

$$\text{a)} \begin{cases} x + 2z = 11 \\ x + y = 3 \\ y + z = 13 \\ x + y + z = 10 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z - t = 0 \\ x + y - z - t = -1 \\ x + y + z - t = 2 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ 4x + 2y - z = 0 \\ 6x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} x - 3y - z = -1 \\ x + 5y + 3z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ 3x + 7y + 5z = 5 \end{cases}$$

$$\text{a)} \left. \begin{array}{l} x + 2z = 11 \\ x + y = 3 \\ y + z = 13 \\ x + y + z = 10 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 2a - 1a & & & -8 \\ 3a & & & 13 \\ 4a - 1a & & & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 3a - 2a & & & 21 \\ 4a - 2a & & & 7 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 2a & & & 0 \\ 3a - 3 \cdot 4a & & & 0 \\ 4a & & & 7 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2z = 11 \\ y - 2z = -8 \\ z = 7 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y = -8 + 2z = -8 + 14 = 6 \\ x = 11 - 2z = 11 - 14 = -3 \end{array} \right\}$$

Solució: $(-3, 6, 7)$

$$\text{b)} \left. \begin{array}{l} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z - t = 0 \\ x + y - z - t = -1 \\ x + y + z - t = 2 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2a - 1a & & & & -1 \\ 3a - 1a & & & & -2 \\ 4a - 1a & & & & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z + t = 1 \\ -2y - 2t = -1 \\ z + t = 1 \\ -2t = 1 \end{array} \right\}$$

$$t = -\frac{1}{2} \quad z = 1 - t = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad y = \frac{2t - 1}{-2} = 1 \quad x = 1 - y - z - t = -1$$

$$\text{Solució: } \left(-1, 1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$c) \begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ 4x + 2y - z = 0 \\ 6x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1a & & & \\ 2a - 2 \cdot 1a & & & \\ 3a - 3 \cdot 1a & & & \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ -7z = 0 \\ x = \lambda \end{cases} \quad \text{Solucions: } (\lambda, -2\lambda, 0)$$

$$d) \begin{cases} x - 3y - z = -1 \\ x + 5y + 3z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ 3x + 7y + 5z = 5 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1a & & & \\ 2a & & & \\ 1a & & & \\ 4a & & & \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1a & & & \\ 2a - 1a & & & \\ 3a - 1a & & & \\ 4a - 3 \cdot 1a & & & \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1a & & & \\ 2a : 2 & & & \\ 3a + 2a & & & \\ 4a - 2a & & & \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y + z = 1 \\ y = \lambda \end{cases} \quad \begin{aligned} z &= 1 - 2y \\ x &= 1 - y - z = 1 - y - 1 + 2y = y \end{aligned}$$

Solucions: $(\lambda, \lambda, 1 - 2\lambda)$

29. Discuteix els sistemes següents segons els valors de α i interpreta'ls geomètricament:

$$a) \begin{cases} \alpha x - y = 1 \\ x - \alpha y = 2\alpha - 1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 3y - 5z = -16 \\ x + \alpha y - z = 0 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} \alpha x - y = 1 \\ x - \alpha y = 2\alpha - 1 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & -1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 2\alpha - 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1a & & \\ 2a \cdot \alpha - 1a & & \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & -1 & 1 \\ 0 & 1 - \alpha^2 & 2\alpha^2 - \alpha - 1 \end{array} \right) \quad \alpha \neq 0$$

- Si $\alpha \neq 1$, queda:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ Sistema } \textit{compatible indeterminat}. \text{ Són dues rectes coincidents.}$$

- Si $\alpha = -1$, queda:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \text{ Sistema } \textit{incompatible}. \text{ Són dues rectes paral·leles.}$$

- Si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -1 \rightarrow$ Sistema *compatible determinat*. Són dues rectes secants.

$$\text{b) } \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 3y - 5z = -16 \\ x + \alpha y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & -16 \\ 1 & \alpha & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2a - 2 \cdot 1a & 2a - 2 \cdot 1a & -5 & -16 \\ 3a - 1a & 3a - 1a & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2a & 2a & -5 & -16 \\ 5 \cdot 3a - 2a & 5 \cdot 3a - 2a & 0 & 13 \end{array} \right)$$

- Si $\alpha \neq 0 \rightarrow$ Sistema compatible determinat. Són tres plans que es tallen en un punt.
- Si $\alpha = 0 \rightarrow$ Sistema incompatible. Els plans es tallen dos a dos, però no hi ha cap punt comú als tres.

30. Es considera el sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + ay + 3z = 2 \\ 2x + (2 + a)y + 6z = 3 \end{cases}$$

- a) Troba un valor de a per al qual el sistema sigui incompatible.
 b) Discuteix si hi ha algun valor del paràmetre a per al qual el sistema sigui compatible determinat.
 c) Resol el sistema per a $a = 0$.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + ay + 3z = 2 \\ 2x + (2 + a)y + 6z = 3 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & 3 & 2 \\ 2 & (2 + a) & 6 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2a - 1a & 2a - 1a & -5 & -16 \\ 3a - 2 \cdot 1a & 3a - 2 \cdot 1a & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2a & 2a & -5 & -16 \\ 3a - 2a & 3a - 2a & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- a) $a = 2$
 b) No existeix cap valor de a per al qual el sistema sigui compatible determinat.
 c) Si $a = 0$, queda:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -2y = 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} y &= -1/2 \\ x - 1 + 3z &= 1 \quad \rightarrow \quad x = 2 - 3z \\ z &= \lambda \end{aligned}$$

Solucions: $(2 - 3\lambda, -\frac{1}{2}, \lambda)$

31. Considera el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 2x - 2y - z = 4 \\ x + 2y - 2z = -1 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

a) Hi ha una solució en què y sigui igual a 0?

b) Resol el sistema.

c) Interpreta'l geomètricament.

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 2y - z = 4 \\ x + 2y - 2z = -1 \\ x - z = 1 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 3a \\ 2a \\ 1a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1a \\ 2a - 1a \\ 3a - 2 \cdot 1a \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a + 2a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} x - z = 1 \\ 2y - z = -2 \end{array} \right\}$$

$$a) y = 0 \rightarrow \left. \begin{array}{l} x - z = 1 \\ -z = -2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} z = 2 \\ x = 1 + z = 3 \end{array} \right\}$$

Solució: (3, 0, 2)

$$b) \left. \begin{array}{l} x = 1 + z = 1 + 2y + 2 = 3 + 2y \\ z = 2y + 2 \\ y = \lambda \end{array} \right\}$$

Solucions: (3 + 2λ, λ, 2λ + 2)

c) Són tres plans que es tallen en una recta.

32. Troba un nombre de tres xifres sabent que aquestes sumen 9; que, si del nombre donat se li resta el que resulta d'invertir l'ordre de les seves xifres, la diferència és 198, i que la xifra de les desenes és mitjana aritmètica de les altres dues.

• Si x és la xifra de les unitats, y la de les desenes i z la de les centenes, el nombre serà $x + 10y + 100z$

Activitat resolta.

33. A, B i C són tres amics. A li diu a B: si et dono la tercera part dels meus diners, els tres en tindrem la mateixa quantitat. Calcula el que té cadascú si entre els tres tenen 60 €.

$$x = \text{diners A} \quad y = \text{diners B} \quad z = \text{diners C}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - \frac{x}{3} = y + \frac{x}{3} = z = \frac{60}{3} \\ x + y + z = 60 \end{array} \right\}$$

Solució: $z = 20$ €, $y = 10$ €, $x = 30$ €

- 34.** Un magatzemista disposa de tres tipus de cafè: el tipus A de 9,8 €/kg; el B de 8,75 €/kg i el C de 9,5 €/kg. Vol fer una mescla amb els tres tipus de 10,5 kg a 9,40 €/kg. Quants quilos de cada tipus ha de mesclar si ha de posar el doble del tipus C que dels tipus A i B?

x = quantitat en les de cafè A y = quantitat en les de cafè B
 z = quantitat en les de cafè C

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 10,5 \\ x + y = 2z \\ 9,8x + 8,75y + 9,5z = 9,40 \cdot 10,5 \end{array} \right\}$$

Solució: Amb les 2 primeres eq.: $z = 3,5$ kg, $y = 3$ kg, $x = 4$ kg

Pàgina 28

- 35.** Una botiga ha venut 600 exemplars d'un videojoc per un total de 6 384 €. El preu original era de 12 €, però també ha venut còpies defectuosos amb descomptes del 30% i del 40%. Si sabem que el nombre de còpies defectuosos venuades va ser la meitat del de les còpies en bon estat, calcula a quantes còpies se li aplicà el 30% de descompte.

Anomenem x el nombre de còpies venudes al preu original, 12 €; y el nombre de còpies venudes amb un 30% de descompte, $0,7 \cdot 12 = 8,4$ €; i z el nombre de còpies venudes amb un 40% de descompte, $0,6 \cdot 12 = 7,2$ €.

Així:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 600 \\ 12x + 8,4y + 7,2z = 6384 \\ y + z = \frac{x}{2} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + y + z = 600 \\ 12x + 8,4y + 7,2z = 6384 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 12 & 8,4 & 7,2 & 6384 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ -2a + 12 \cdot 1a & -3a + 1a & & \\ & & & \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & 3,6 & 4,8 & 816 \\ 0 & 3 & 3 & 600 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 2a & & & \\ 3a : 3 & & & \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & 3,6 & 4,8 & 816 \\ 0 & 1 & 1 & 200 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 3a & & & \\ 2a - 3,6 \cdot 3a & & & \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 1,2 & 96 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 600 \\ y + z = 200 \\ 1,2z = 96 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} z = 80 \\ y = 120 \\ x = 400 \end{array} \right.$$

Solució: El 30% de descompte es va aplicar a 120 còpies.

- 36.** Un caixer automàtic conté 95 bitllets de 10, 20 i 50 € i un total de 2 000 €. Si el nombre de bitllets de 10 € és el doble que el nombre de bitllets de 20 €, descobreix quants bitllets hi ha de cada tipus.

Anomenem x el nombre de billets de 10 €; y el nombre de billets de 20 €, i z el nombre de billets de 50 €. Veiem que:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 95 \\ 10x + 20y + 50z = 2000 \\ x = 2y \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x + y + z = 95 \\ x + 2y + 5z = 200 \\ x = 2y \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 3x + z = 95 \\ 4y + 5z = 200 \\ x = 2y \end{array} \right\}$$

$$z = 95 - 3y$$

$$4y + 5(95 - 3y) = 200 \rightarrow 4y + 475 - 15y = 200 \rightarrow 275 = 11y$$

$$y = 25 \rightarrow z = 20 \rightarrow x = 50$$

Solució: Hi ha 50 billets de 10 €, 25 billets de 20 € i 20 billets de 50 €.

- 37.** Es disposa de tres caixes A, B i C amb monedes d'1 euro. Se sap que en total hi ha 36 euros. El nombre de monedes de A excedeix en 2 a la suma de les monedes de les altres dues caixes. Si es trasllada 1 moneda de la caixa B a la caixa A, aquesta tindrà el doble de monedes que B. Esbrina quantes monedes hi havia en cada caixa.

Anomenem x el nombre de monedes que hi ha a la caixa A, y el nombre de monedes que hi ha a la caixa B, i z el nombre de monedes que hi ha a la caixa C. Veiem que:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 36 \\ x = y + z + 2 \\ x + 1 = 2(y - 1) \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x + y + z = 36 \\ x - y - z = 2 \\ x + 1 = 2y - 2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x + y + z = 36 \\ x - y - z = 2 \\ x - 2y = -3 \end{array} \right\}$$

Sumant les dues primeres equacions: $2x = 38 \rightarrow x = 19$

$$\text{De la } 3\text{a equació} \rightarrow y = \frac{x+3}{2} = 11$$

$$z = 36 - y - x = 6$$

Solució: Hi havia 19 monedes a la caixa A, 11 a la B i 6 a la C.

- 38.** Un automòbil puja els pendents a 54 km/h, els baixa a 90 km/h i en pla circula a 80 km/h. Per anar de A a B triga 2 hores i 30 minuts, i per tornar de B a A, 2 hores i 45 minuts. Quina és la longitud de camí pla entre A i B si sabem que la distància entre A i B és de 192 km?

$$\left. \begin{array}{l} x = \text{tram pendent pujada} \\ y = \text{tram pla} \\ z = \text{tram pendent baixada} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x + y + z = 192 \\ 54x + 80y + 90z = 2,5 \text{ (2 hores i mitja)} \\ 54z + 80y + 90x = 2,75 \text{ (2 hores i 45 minuts)} \end{array} \right\}$$

94,8 km.

- 39.** Tres entitats financeres A, B i C ofereixen, respectivament, per a dipòsits superiors a 2000 €, un interès anual del 2 %, 3 % i K %. La Joana, en Manel i en Daniel decideixen invertir els seus estalvis en aquestes entitats durant un any. Si tots ho fessin a A obtindrien en total uns beneficis de 164 €; però si la Joana optés per A, en Manel per C i en Daniel per B, obtindrien 192 €; i si la Joana i en Manel es decidissin per B i en Daniel per C, obtindrien 218 €.

a) Escriu un sistema d'equacions que descrigui la situació.

b) Calcula, sense resoldre el sistema, la quantitat de diners invertits entre les tres persones.

c) Troba, si existeix, un valor de K per al qual hi hagin infinites solucions. Resol el sistema per a l'esmentat valor de K i dóna tres solucions diferents.

j = diners invertits per la Joana

m = diners invertits per en Manel

d = diners invertits per en David

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } (j + m + d) \cdot \frac{2}{100} = 164 \\ j \cdot \frac{2}{100} + m \cdot \frac{k}{100} + d \cdot \frac{3}{100} = 192 \\ (j + m) \cdot \frac{3}{100} + d \cdot \frac{k}{100} = 218 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} j + m + d = 8.200 \\ 2j + km + 3d = 19.200 \\ 3j + 3m + kd = 21.800 \end{array}$$

b) No és possible, ja que ens calen més dades, tot i que si tots han d'haver invertit $> 2000 \text{ €} \rightarrow 1,6 < k < 2,3$

c) Avaluem el sistema

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 8.200 \\ 2 & k & 3 & 19.200 \\ 3 & 3 & k & 21.800 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (2a) - 2 \cdot (1a) \\ (3a) - 3 \cdot (1a) \end{array}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 8.200 \\ 0 & k-2 & 1 & 2.800 \\ 0 & 0 & k-3 & 2.800 \end{array} \right)$$

De l'última equació: Si $(k - 3) = 0$ el sistema serà incompatible, $k = 3$ sistema incompatible \rightarrow no solució.

De la segona equació: Si $(k - 2) = 0 \rightarrow k = 2$ quedarà:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 8.200 \\ 0 & 0 & 1 & 2.800 \\ 0 & 0 & -1 & -2.800 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 8.200 \\ 0 & 0 & 1 & 2.800 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Sistema compatible indeterminat $\rightarrow \infty$ solucions

Per $k = 2$:

$$\begin{aligned} j + m + d &= 8.200 \\ d &= 2.800 \end{aligned}$$

En Daniel ha invertit 2.800 € i entre la Joana i en Manel n'han invertit 5.400 € .

Podria ser:

	JOANA	MANEL	DANIEL
SOLUCIÓ 1	3.000	2.400	2.800
SOLUCIÓ 2	3.200	2.200	2.800
SOLUCIÓ 3	2.100	3.300	2.800
...			2.800

- 40.** Una persona ha obtingut 6000 € de benefici per invertir un total de 60 000 € en tres empreses: A, B i C. La suma dels diners invertits en A i B va ser m vegades els invertits en C i els beneficis van ser el 5 % en l'empresa A, el 10 % en la B i el 20 % en la C.

a) Planteja un sistema d'equacions per esbrinar la quantitat invertida en cada empresa.

b) Prova que si $m > 0$ el sistema és comptable determinat.

c) Troba la solució per a $m = 5$.

a)
$$\begin{array}{l} a = \text{diners invertits en l'empresa A} \\ b = \text{diners invertits en l'empresa B} \\ c = \text{diners invertits en l'empresa C} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a + b + c = 60.000 \\ a + b = mc \\ a \cdot \frac{5}{100} + b \cdot \frac{10}{100} + c \cdot \frac{20}{100} = 6.000 \end{array} \right.$$

b)
$$\begin{array}{l} a + b + c = 60.000 \\ a + b - mc = 0 \\ 5a + 10b + 20c = 600.000 \end{array} \left\{ \begin{array}{l|l} 1 & 1 & 1 & 60.000 \\ 1 & 1 & -m & 0 \\ 5 & 10 & 20 & 600.000 \end{array} \right.$$

Cal que $m > 0$ per tal que sistema compatible determinat

c)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60.000 \\ 0 & 5 & 15 & 300.000 \\ 0 & 0 & m & -60.000 \end{array} \right)$$

Solució: Si $m = 5 \rightarrow 6c = -60.000$
 $c = 10.000, b = 30.000, a = 20.000$

- 41.** Les edats d'un noi, el seu pare i el seu avi compleixen les condicions següents: la suma de les edats del pare, del fill i el doble de la de l'avi fa 182 anys. El doble de l'edat del fill més la de l'avi fa 100 anys i l'edat del pare és α vegades la del seu fill.

a) Troba les edats dels tres suposant que $\alpha = 2$.

b) És possible que $\alpha = 3$?

c) Si $\alpha = 3$ i en la primera condició la suma és 200, què passa amb el problema?

a)
$$\begin{array}{l} f = \text{edat del noi o fill} \\ p = \text{pare} \\ a = \text{avi} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} p + f + 2a = 182 \\ 2f + a = 100 \\ p = \alpha f \end{array} \right. \rightarrow \begin{array}{l} 2a + p + f = 182 \\ a + 2f = 100 \\ p - \alpha f = 0 \end{array}$$

Solució: Si $\alpha = 2 \rightarrow f = 18$ anys, $p = 36$ anys, $a = 64$ anys

$$\left. \begin{array}{l} b) \quad 2a + p + f = 182 \\ \quad \quad a + 2f = 100 \\ \quad \quad p - af = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 182 \\ 1 & 0 & 2 & 100 \\ 0 & 1 & -a & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(1a) - 2(2a)} \left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 182 \\ 0 & 1 & -3 & -18 \\ 0 & 1 & -a & 0 \end{array} \right)$$

$$2a - 3a \xrightarrow{\quad} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 182 \\ 0 & 1 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & a-3 & -18 \end{array} \right)$$

Solució: Si $a = 3$ Sistema incompatible → No solució

c) Sistema incompatible ja que la 3a equació no es pot solucionar.

- 42. Tres amics acorden jugar tres partides de daus de forma que, quan un perdi, donarà a cada un dels altres dos una quantitat igual a la que cada un posseixi en aquell moment. Cada un va perdre una partida, i al final cada un tenia 24 €. Quant tenia cada jugador en començar?**

Fem una taula que resumeixi la situació:

	COMENÇAMENT	1a PARTIDA	2a PARTIDA	3a PARTIDA
1r QUE PERD	x	$x - y - z$	$2x - 2y - 2z$	$4x - 4y - 4z$
2n QUE PERD	y	$2y$	$-x + 3y - z$	$-2x + 6y - 2z$
3r QUE PERD	z	$2z$	$4z$	$-x - y + 7z$

$$\left. \begin{array}{l} 4x - 4y - 4z = 24 \\ -2x + 6y - 2z = 24 \\ -x - y + 7z = 24 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x - y - z = 6 \\ -x + 3y - z = 12 \\ -x - y + 7z = 24 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 6 \\ -1 & 3 & -1 & 12 \\ -1 & -1 & 7 & 24 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1a \\ 2a + 1a \\ 3a + 1a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 18 \\ 0 & -2 & 6 & 30 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1a \\ 2a : 2 \\ 3a : 2 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & -1 & 3 & 15 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a + 2a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 24 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y - z = 6 \\ y - z = 9 \\ 2z = 24 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} z = 12 \\ y = 9 + z = 21 \\ x = 6 + y + z = 39 \end{array} \right\}$$

Solució: El jugador que va perdre primer tenia 39 €; el que va perdre en segon lloc tenia 21 €, i el que va perdre en tercer lloc tenia 12 €.

- 43. Si tenim un sistema compatible indeterminat de 2 equacions lineals amb 2 incògnites, es pot aconseguir un sistema incompatible afegint-hi una tercera equació?**

Sí. Per exemple:

$$\text{Incompatible } \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \\ x + 2y = 1 \end{array} \right\} \text{ Compatible indeterminat}$$

- 44.** Si a un sistema de 2 equacions amb 2 incògnites incompatible li afegim una altra equació, podríem aconseguir que fos compatible indeterminat? I determinat? Justifica les respostes.

No. Si el sistema és incompatible, les dues equacions inicials són contradictòries. Afegint una altra equació, no podem canviar aquest fet; el sistema seguirà sent incompatible.

- 45.** Quantes solucions té el següent sistema si a és diferent de 1. I si a és igual a 1? Pot ser incompatible?

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ (a - 1)x = 0 \\ x + 3z = 0 \end{cases}$$

Si $a \neq 1$ té única solució, $x = y = z = 0$

Si $a = 1$ sistema compatible indeterminat → Té infinites solucions

No pot ser mai incompatible.

Pàgina 29

- 46.** És possible convertir aquest sistema en compatible indeterminat si hi canviem un signe?

No, a més de canviar el signe perquè les dues equacions deixessin de ser contradictòries, caldria que existís una altra incògnita (per tenir així més d'una solució possible).

- 47.** Donades les equacions: $\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases}$

a) Afegeix-hi una equació perquè el sistema sigui incompatible.

b) Afegeix-hi una equació perquè el sistema sigui compatible determinat.

Justifica en cada cas el procediment seguit.

a) Perquè sigui incompatible, l'equació que afegim ha de ser de la forma:

$$a(3x - 2y + z) + b(2x - 3y + z) = k \text{ con } k \neq 5a - 4b.$$

Si agafem, per exemple, $a = 1$, $b = 0$, $k = 1$, queda:

$$3x - 2y + z = 1$$

Afegint aquesta equació, el sistema seria incompatible.

b) Per exemple, afegint $y = 0$, queda:

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \\ y = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 3x + z = 5 \\ 2x + z = -4 \\ y = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x = 9 \\ y = 0 \\ z = -22 \end{array} \right\} \text{ Compatible determinat} \end{array}$$

- 48.** Defineix quan dos sistemes d'equacions lineals són equivalents. Justifica si són equivalents o no els sistemes següents:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y - z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Dos sistemes d'equacions lineals són equivalents quan totes les solucions del 1r sistema ho són també del 2n, i a la inversa.

Els dos sistemes donats no són equivalents, atès que el 1r és compatible indeterminat (té infinites solucions) i el 2n és determinat (només té una solució).

- 49.** Siguin S i S' dos sistemes equivalents amb solució única que tenen iguals els termes independents. Podem assegurar que tenen iguals els coeficients de les incògnites?

No. Per exemple, els sistemes:

$$S: \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad S': \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

són equivalents, amb solució única $(2, 1)$, tenen iguals els termes independents, però no els coeficients de les incògnites.

PER APROFUNDIR

- 50.** Troba raonadament dos valors del paràmetre a per als quals el sistema següent sigui incompatible:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ ax + y + 2z = 1 \\ x + 3z = 2 \\ 2x + az = 3 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ ax + y + 2z = 1 \\ x + 3z = 2 \\ 2x + az = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & a & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2a - 1a & 2a - 1a & 3a & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & a & 3 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a - 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & a - 6 & -1 \end{array} \right) \text{ Si } a = 1 \text{ o } a = 6, \text{ el sistema és incompatible.}$$

51. Discuteix els sistemes següents en funció del paràmetre a i els resols en el cas que siguin compatibles indeterminats:

$$\text{a)} \begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} ax + y - z = 0 \\ 2x + ay = 2 \\ -x + z = 1 \end{cases}$$

$$\text{a)} \left. \begin{array}{l} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a - 1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a - 1 \\ 0 & -1 & a - 2 & -a + 2 \\ 0 & a - 1 & 0 & 2 - a \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a - 1 \\ 0 & -1 & a - 2 & -a + 2 \\ 0 & a - 1 & 0 & 2 - a \end{array} \right)$$

• Si $a = 1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

• Si $a = 2$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

→ Sistema compatible indeterminat

El resolem en aquest cas:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ y = 0 \\ x + z = 1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x + z = 1 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array} \right\} \rightarrow x = 1 - z$$

Solucions: $(1 - \lambda, 0, \lambda)$

• Si $a \neq 1$ i $a \neq 2$ → Sistema compatible determinat

$$\text{b)} \left. \begin{array}{l} ax + y - z = 0 \\ 2x + ay = 2 \\ -x + z = 1 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & 0 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1a & 1a & 1a & 1a \\ 2a & 2a & 2a & 2a \\ 1a & 1a & 1a & 1a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ a & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ a & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ a - 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1a & 2a & 1a & 1a \\ -a + 3a + 2a & -a^2 + a + 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$-a^2 + a + 2 = 0 \rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} \quad a = -1 \quad a = 2$$

- Si $a = -1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $a = 2$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1a \\ 2a : 2 \\ 3a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} -x + z = 1 \\ x + y = 1 \\ x = \lambda \end{array} \right\} \begin{array}{l} z = 1 + x \\ y = 1 - x \\ x = \lambda \end{array}$$

Sistema compatible indeterminat

Solucions: $(\lambda, 1 - \lambda, 1 + \lambda)$

- Si $a \neq -1$ i $a \neq 2 \rightarrow$ Sistema compatible determinat

52. Discuteix el sistema següent segons els valors del paràmetre a . Interpreta'l geomètricament:

$$\begin{cases} ax + y + z - 4 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \\ x - ay + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} ax + y + z - 4 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \\ x - ay + z - 1 = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} ax + y + z = 4 \\ x + y + z = -1 \\ x - ay + z = 1 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -a & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 2a \\ 1a \\ 3a \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1a \\ 2a - 1a \\ 3a - 1a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ a - 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -a - 1 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

- Si $a = 1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

Els dos primers plans són paral·lels, i el tercer els talla.

- Si $a = -1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

Els dos últims plans són paral·lels, i el primer els talla.

- Si $a \neq 1$ i $a \neq -1 \rightarrow$ Sistema compatible determinat. Són tres plans que es tallen en un punt.

PER PENSAR UNA MICA MÉS

53. Resol el sistema següent:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z + t = 17 \\ x + y + z + w = 16 \\ x + y + t + w = 15 \\ x + z + t + w = 14 \\ y + z + t + w = 14 \end{array} \right.$$

Si sumes les cinc igualtats, n'obtindràs una altra amb què se't poden simplificar molt els càlculs.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z + t = 17 \\ x + y + z + w = 16 \\ x + y + t + w = 15 \\ x + z + t + w = 14 \\ y + z + t + w = 14 \end{array} \right\}$$

Sumant les cinc igualtats, obtenim:

$$4x + 4y + 4z + 4t + 4w = 76, \text{ és a dir:}$$

$$4(x + y + z + t + w) = 76, \text{ o bé:}$$

$$x + y + z + t + w = 19$$

Per tant:

$$\begin{aligned} (x + y + z + t) + w &= 17 + w = 19 \rightarrow w = 2 \\ (x + y + z + w) + t &= 16 + t = 19 \rightarrow t = 3 \\ (x + y + t + w) + z &= 15 + z = 19 \rightarrow z = 4 \\ (x + z + t + w) + y &= 14 + y = 19 \rightarrow y = 5 \\ (y + z + t + w) + x &= 14 + x = 19 \rightarrow x = 5 \end{aligned}$$

54. Ens diuen que x, y, z, t, w són nombres enters i que k val 36 o 38. Decideix raonadament quin dels dos és el seu valor i resol el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z + t = 35 \\ x + y + z + w = 36 \\ x + y + t + w = 38 \\ x + z + t + w = 39 \\ y + z + t + w = k \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z + t = 35 \\ x + y + z + w = 36 \\ x + y + t + w = 38 \\ x + z + t + w = 39 \\ y + z + t + w = k \end{array} \right\}$$

Sumant les cinc igualtats, obtenim:

$$4x + 4y + 4z + 4t + 4w = 148 + k, \text{ és a dir:}$$

$$4(x + y + z + t + w) = 148 + k, \text{ o bé:}$$

$$x + y + z + t + w = 37 + \frac{k}{4}$$

Si x, y, z, t, w són nombres enteros, llur suma també ho serà; així doncs, k ha de ser múltiple de 4. Com que ens diuen que val 36 o 38, tenim que ha de ser $k = 36$ (ja que 38 no és múltiple de 4).

Resolem el sistema, ara que sabem que $k = 36$:

La suma de les cinc igualtats donarà lloc a:

$$x + y + z + t + w = 37 + \frac{36}{4} = 37 + 9 = 46$$

$$\text{Per tant: } (x + y + z + t) + w = 35 + w = 46 \rightarrow w = 11$$

$$(x + y + z + w) + t = 36 + t = 46 \rightarrow t = 10$$

$$(x + y + t + w) + z = 38 + z = 46 \rightarrow z = 8$$

$$(x + z + t + w) + y = 39 + y = 46 \rightarrow y = 7$$

$$(y + z + t + w) + x = 36 + x = 46 \rightarrow x = 10$$

- 55.** Una colla de 6 obrers es compromet a podar els arbres d'una plantació. Treballen de dilluns a dissabte. Cada dia, cinc d'ells poden i el sisè els atén (reposa eines, els dóna aigua, arreplega els troncs que cauen...). Cada obrer poda el mateix nombre d'arbres cada dia, és a dir, si l'Albert poda 8 arbres un dia, podarà 8 arbres cada dia que intervingui. Els resultats són:

Dilluns: 34 arbres podats.

Dimarts: 36 arbres podats.

Dimecres: 37 arbres podats.

Dijous: 38 arbres podats.

Divendres: 40 arbres podats.

Dissabte: 33 arbres podats.

Calcula quants arbres diaris poda cada un dels sis obrers sabent que cap d'ells poda els sis dies.

Anomenem:

a = nombre d'arbres que poda l'obrer que descansa dilluns.

b = nombre d'arbres que poda l'obrer que descansa dimarts.

c = nombre d'arbres que poda l'obrer que descansa dimecres.

d = nombre d'arbres que poda l'obrer que descansa dijous.

e = nombre d'arbres que poda l'obrer que descansa divendres.

f = nombre d'arbres que poda l'obrer que descansa dissabte.

Tenim el següent sistema d'equacions:

$$b + c + d + e + f = 34$$

$$a + c + d + e + f = 36$$

$$a + b + d + e + f = 37$$

$$a + b + c + e + f = 38$$

$$a + b + c + d + f = 40$$

$$a + b + c + d + e = 33 \text{ o } 35$$

Sumem totes les equacions:

$$5a + 5b + 5c + 5d + 5e + 5f = 218 \text{ o } 220$$

$$5(a + b + c + d + e + f) = 218 \text{ o } 220$$

218 no és múltiple de 5, per tant el total ha de ser 220 (el dissabte es poden 35 arbres)

$$a + b + c + d + e + f = 44$$

$$a + b + c + d + e + f = 44 \rightarrow a + (b + c + d + e + f) = 44 \rightarrow a + 34 = 44 \rightarrow a = 10$$

$$b + 36 = 44 \rightarrow b = 8$$

$$c + 37 = 44 \rightarrow c = 7$$

$$d + 38 = 44 \rightarrow d = 6$$

$$e + 40 = 44 \rightarrow e = 4$$

$$f + 35 = 44 \rightarrow f = 9$$