UNITAT 2 ÀLGEBRA DE MATRIUS

Pàgina 30

Els sis consellers d'una empresa (A, B, C, D, E, F) han d'escollir un president d'entre ells mateixos. Cadascun opina, sobre els altres i sobre si mateix de la manera següent:

– Si creu que és *idoni*, posa 1.

– Si creu que és *no idoni*, posa –1.

– Si no té una opció definida, posa 0.

Aquests en són els resultats:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

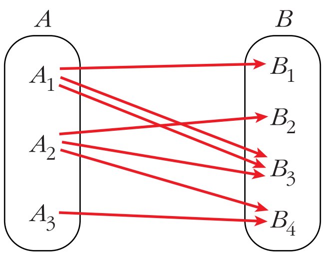
Per exemple, el –1 assenyalat en vermell significa que *D* opina que *E* és no idoni.

- **Amb l'ajuda de la taula, estudia detalladament els resultats de la votació, analitza algunes característiques dels participants i opina qui creus que hauria de ser president.**

El candidat C és qui té més suport.

En un país *A* hi ha tres aeroports internacionals, A_1, A_2, A_3, mentre que en el país *B* n'hi ha quatre, B_1, B_2, B_3, B_4.

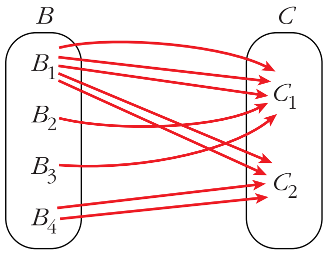
Una persona que dilluns vulgui anar de *A* a *B* disposa dels vols següents:



La informació anterior pot ser representada mitjançant la taula següent:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	0	2	0
A_2	0	1	1	1
A_3	0	0	0	1

- **Aquí tens representats, mitjançant fletxes, els vols que hi ha dimarts des del país B fins al país C.**



Representa, mitjançant una taula com l'anterior, la informació recollida en el diagrama.

	C_1	C_2
B_1	3	2
B_2	1	0
B_3	1	0
B_4	0	2

- **Una persona vol sortir dilluns de A, passar la nit a B i arribar dimarts a C. Quantes possibles combinacions té per cada punt de sortida i cada punt d'arribada? Una bona manera de presentar la resposta que ens demanen és omplint una taula com aquesta:**

	C_1	C_2
A_1	**5**	
A_2		
A_3		

En total tenim 5 possibles formes d'anar de A_1 a C_1.

Continua tu, omplint raonadament la resta de la taula i explica, en cada cas, com arribes a la resposta.

Pàgina 33

1. Escriu les matrius transposades de:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{F} = (5 \;\; 4 \;\; 6 \;\; 1)$$

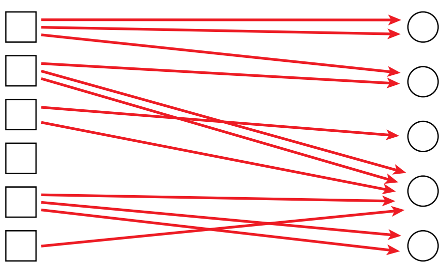
$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D^t = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad E^t = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad F^t = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Escriu una matriu X de tal manera que $X^t = X$.

Per exemple, $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Escriu una matriu que descrigui el següent:



$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pàgina 34

4. Siguin les matrius:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{8} & \mathbf{-10} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{6} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

Calcula $\boldsymbol{E = 2A - 3B + C - 2D}$.

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -12 & 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ 12 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -1 & -18 \\ 16 & -15 & -23 \end{pmatrix}$$

Pàgina 37

5. Efectua tots els possibles productes entre les matrius següents:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{5} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{6} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-5} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 & 5 \\ 24 & -4 & -1 & -10 \end{pmatrix}; \quad A \cdot D = \begin{pmatrix} 7 & 18 & -4 \\ 0 & 30 & 5 \end{pmatrix}; \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 21 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -5 & 26 & 13 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 39 & 3 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}; \quad D \cdot C = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 & 5 \\ 26 & 5 & 2 & 0 \\ 28 & 38 & -1 & 10 \end{pmatrix}; \quad D \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 4 & 31 & 4 \\ -4 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

6. Intenta aconseguir una matriu $\boldsymbol{I_3}$ de dimensió 3 × 3 que, multiplicada per qualsevol matriu quadrada $\boldsymbol{A}$ (3 × 3), la deixi igual.

És a dir: $\boldsymbol{A \cdot I_3 = I_3 \cdot A = A}$

La matriu $\boldsymbol{I_3}$ s'anomena matriu unitat d'ordre 3. Quan la tinguis, sabràs obtenir una matriu unitat de qualsevol ordre.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pàgina 38

7. Comprova les propietats 2 i 3 anteriors, referents al producte de nombres per matrius, prenent: *a* = 3, *b* = 6

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2)\ 9A = \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix} \\ \quad 3A + 6A = \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 30 & -6 \\ 12 & -18 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$$9A = 3A + 6A$$

$$\left.\begin{array}{l} 3)\ 3(A + B) = 3\begin{pmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix} \\ \quad 3A + 3B = \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 & -6 & 3 \\ 12 & 18 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$$3(A + B) = 3A + 3B$$

$$4)\ 1 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Pàgina 39

8. Comprova les propietats distributives per a les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 9 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot (B + C) = A \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & -1 & 14 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix} \\ A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 42 & -1 \\ 15 & 0 & 45 & -10 \\ 17 & 5 & 60 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -3 & 26 & 20 \\ 0 & -5 & 25 & 25 \\ 4 & -5 & 36 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$\left.\begin{array}{l} (B + C) \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & -1 & 14 & 3 \end{pmatrix} \cdot D = \begin{pmatrix} -24 \\ -60 \end{pmatrix} \\ B \cdot D + C \cdot D = \begin{pmatrix} 0 \\ -48 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -60 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$$(B + C) \cdot D = B \cdot D + C \cdot D$$

Pàgina 41

9. **Calcula, utilitzant el mètode de Gauss, la inversa de cada una de les matrius següents o esbrina que no la té:**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

a) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{1a} - \text{2a}]{\text{1a}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ *Solució:* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[3 \cdot \text{1a} - \text{2a}]{\text{1a}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{2a} : 2]{\text{1a} - \text{2a}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$

Solució: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

c) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[2 \cdot \text{1a} + \text{2a}]{\text{1a}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$

Fila de zeros. La matriu no té inversa.

10. **Calcula la inversa de cada una de les matrius següents o esbrina que no la té:**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{1a} \\ 4 \cdot \text{1a} - \text{2a} \\ 7 \cdot \text{1a} - \text{3a}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 7 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{1a} \\ \text{2a} \\ 2 \cdot \text{2a} - \text{3a}}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

Fila de zeros. La matriu no té inversa.

b) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{1a} \\ \text{2a} \\ \text{1a} - \text{3a}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{1a} - 2 \cdot \text{2a} \\ \text{2a} + 2 \cdot \text{3a} \\ \text{3a}}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{1a} - \text{3a} \\ \text{2a} \\ -\text{3a}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Solució: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}\text{1a} \\ \text{1a} - \text{2a} \\ 2 \cdot \text{1a} - \text{3a}\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}\text{1a} + \text{2a} \\ \text{2a} \\ 2 - \text{2a} + \text{3a}\end{array}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 4 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}\text{1a} - \text{3a}/2 \\ 1/5 \cdot \text{3a} - \text{2a} \\ \text{3a} : 10\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{array}\right)$

Solució: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{pmatrix}$

Pàgina 43

11. Calcula x, y, z, t perquè es compleixi: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - z & 2y - t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x - z = 5 \\ 2y - t = 1 \\ z = 0 \\ t = 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{2} \\ y = \dfrac{3}{2} \\ z = 0 \\ t = 2 \end{array}\right\}$$

Solució: $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

12. Per a les matrius: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, comprova:

a) $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

b) $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$

c) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

a) $\left.\begin{array}{l} A \cdot (B + C) = A \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 41 & 10 \end{pmatrix} \\ A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 26 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 41 & 10 \end{pmatrix} \end{array}\right\} A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

b) $\left.\begin{array}{l} (A + B) \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 30 & 6 \end{pmatrix} \\ A \cdot C + B \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 30 & 6 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

$$\left.\begin{array}{l} \text{c) } A\cdot(B\cdot C)=A\cdot\begin{pmatrix}1&5\\15&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&5\\107&3\end{pmatrix} \\ (A\cdot B)\cdot C=\begin{pmatrix}-1&5\\26&3\end{pmatrix}\cdot C=\begin{pmatrix}1&5\\107&3\end{pmatrix}\end{array}\right\}\ A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$$

13. **Siguin** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{3}&\mathbf{0}\\\mathbf{5}&\mathbf{-1}\end{pmatrix}$ **i** $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{6}\\\mathbf{1}&\mathbf{-3}\end{pmatrix}$**.**

Troba $\boldsymbol{X}$ **que compleixi:** $\mathbf{3}\cdot\boldsymbol{X}-\mathbf{2}\cdot\boldsymbol{A}=\mathbf{5}\cdot\boldsymbol{B}$

$$3X=5B+2A=\begin{pmatrix}0&30\\5&-15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&0\\10&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&30\\15&-17\end{pmatrix}\qquad X=\begin{pmatrix}2&10\\5&-17/3\end{pmatrix}$$

14. **Troba dues matrius,** $\boldsymbol{A}$ **i** $\boldsymbol{B}$**, de dimensió 2 × 2 que compleixin:**

$$\mathbf{2}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{4}\\\mathbf{2}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}&\mathbf{2}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}2A+B=\begin{pmatrix}1&4\\2&0\end{pmatrix}\\ A-B=\begin{pmatrix}-1&2\\1&0\end{pmatrix}\end{array}\right\}\ \text{Sumant: } 3A=\begin{pmatrix}0&6\\3&0\end{pmatrix}\ \to\ A=\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}$$

$$B=A-\begin{pmatrix}-1&2\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&2\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

Solució: $A=\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

15. **Troba dues matrius** $\boldsymbol{X}$ **i** $\boldsymbol{Y}$ **que verifiquin:**

$$\mathbf{2}\boldsymbol{X}-\mathbf{3}\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{5}\\\mathbf{4}&\mathbf{2}\end{pmatrix}\ \textbf{i}\ \boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}&\mathbf{0}\\\mathbf{3}&\mathbf{6}\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}2X-3Y=\begin{pmatrix}1&5\\4&2\end{pmatrix}\\ X-Y=\begin{pmatrix}-1&0\\3&6\end{pmatrix}\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}2X-3Y=\begin{pmatrix}1&5\\4&2\end{pmatrix}\\ -2X+2Y=\begin{pmatrix}2&0\\-6&-12\end{pmatrix}\end{array}\right\}$$

$$\text{Sumant: } -Y=\begin{pmatrix}3&5\\-2&-10\end{pmatrix}\ \to\ Y=\begin{pmatrix}-3&-5\\2&10\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}-1&0\\3&6\end{pmatrix}+Y=\begin{pmatrix}-1&0\\3&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&-5\\2&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-5\\5&16\end{pmatrix}$$

Solució: $X=\begin{pmatrix}-4&-5\\5&16\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}-3&-5\\2&10\end{pmatrix}$

16. **Busca com ha de ser una matriu X que compleixi:**

$$\boldsymbol{X} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{X}$$

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x+y \\ z & z+t \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{han de ser iguals}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = x + z \\ x + y = y + t \\ z = z \\ z + t = t \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = t \\ \\ z = 0 \end{array}\right\}$$

Solució: $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$, en què x i y són nombres reals qualssevol.

17. **Efectua les operacions següents amb les matrius donades:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{7} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

a) $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})$

b) $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C}$

c) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}$

a) $A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$

b) $(A - B) \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -15 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

c) $A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 12 \\ 9 & -9 \end{pmatrix}$

18. **Donada la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ comprova que $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})^2 = \mathbf{0}$.**

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

19. **Troba la inversa de les matrius:**

a) $\begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-8} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7x + 3z & 7y + 3t \\ 2x + z & 2y + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} 7x + 3z = 1 \\ 2x + z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ z = -2 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} 7y + 3t = 0 \\ 2y + t = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = -3 \\ t = 7 \end{array}$

Per tant, la inversa és $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3x - 2z & 3y - 2t \\ -8x + 5z & -8y + 5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{r} 3x - 2z = 1 \\ -8x + 5z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -5 \\ z = -8 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{r} 3y - 2t = 0 \\ -8y + 5t = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = -2 \\ t = -3 \end{array}$

Per tant, la inversa és $\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$.

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} +1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Pàgina 44

20. Considera $\vec{u}$ (7, 4, –2), $\vec{v}$ (5, 0, 6), $\vec{w}$ (4, 6, –3), a = 8, b = –5, elements de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}$. Comprova les vuit propietats que s'enumeren a dalt.

- *Associativa*: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (12, 4, 4) + \vec{w} = (16, 10, 1)$

  $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + (9, 6, 3) = (16, 10, 1)$

- *Commutativa*: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

  $\vec{u} + \vec{v} = (12, 4, 4) = \vec{v} + \vec{u}$

- *Vector nul*: $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$

  $\vec{v} + \vec{0} = (5, 0, 6) + (0, 0, 0) = (5, 0, 6) = \vec{v}$

- *Vector oposat*: $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

  $\vec{v} + (-\vec{v}) = (5, 0, 6) + (-5, 0, -6) = (0, 0, 0)$

- *Associativa*: $(a \cdot b) \cdot \vec{v} = a \cdot (b \cdot \vec{v})$

  $(8 \cdot (-5)) \cdot (5, 0, 6) = -40 \cdot (5, 0, 6) = (-200, 0, -240)$

  $8 \cdot [-5 \cdot (5, 0, 6)] = 8 \cdot (-25, 0, -30) = (-200, 0, -240)$

- *Distributiva I*: $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$

  $(a + b) \cdot \vec{v} = 3 \cdot (5, 0, 6) = (15, 0, 18)$

  $a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v} = 8 \cdot (5, 0, 6) - 5 \cdot (5, 0, 6) = (40, 0, 48) - (25, 0, 30) = (15, 0, 18)$

- *Distributiva II*: $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$

  $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 8 \cdot (12, 4, 4) = (96, 32, 32)$

  $a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v} = 8 \cdot (7, 4, -2) + 8 \cdot (5, 0, 6) = (56, 32, -16) + (40, 0, 48) = (96, 32, 32)$

- *Producte per 1*: $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

  $1 \cdot \vec{v} = 1 \cdot (5, 0, 6) = (5, 0, 6) = \vec{v}$

Pàgina 46

Comprova si els següents conjunts de *n*-uples són L.I. o L.D.

21. **(3, 0, 1, 0), (2, –1, 5, 0), (0, 0, 1, 1), (4, –2, 0, –5)**

Apliquem la propietat fonamental:

$$x(3, 0, 1, 0) + y(2, -1, 5, 0) + z(0, 0, 1, 1) + w(4, -2, 0, -5) = (0, 0, 0, 0)$$

Si operem, arribem a:

$$(3x + 2y + 4w, -y - 2w, x + 5y + z, z - 5w) = (0, 0, 0, 0)$$

Aquesta igualtat dóna lloc al següent sistema:

$$\left.\begin{array}{rl} 3x + 2y + 4w &= 0 \\ -y - 2w &= 0 \\ x + 5y + z &= 0 \\ z - 5w &= 0 \end{array}\right\}$$

Aquest sistema té com a solució única $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $w = 0$. Per tant, els vectors són linealment independents.

22. **(3, 0, 1, 0), (2, –1, 5, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)**

Apliquem la propietat fonamental:

$$x(3, 0, 1, 0) + y(2, -1, 5, 0) + z(0, 0, 1, 1) + w(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

Si operem, arribem a:

$$(3x + 2y, -y, x + 5y + z, z + w) = (0, 0, 0, 0)$$

Aquesta igualtat dóna lloc al sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y \qquad\quad = 0 \\ -y \qquad\quad = 0 \\ x + 5y + z \qquad = 0 \\ z + w = 0 \end{array}\right\}$$

Aquest sistema té com a solució única $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $w = 0$. Per tant, els vectors són linealment independents.

23. **(2, –4, 7), (1, 0, 2), (0, 1, 2)**

Apliquem la propietat fonamental:

$$x(2, -4, 7) + y(1, 0, 2) + z(0, 1, 2) = (0, 0, 0)$$

Si operem, arribem a:

$$(2x + y, -4x + z, 7x + 2y + 2z) = (0, 0, 0)$$

Aquesta igualtat dóna lloc al sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y \qquad = 0 \\ -4x \qquad + z = 0 \\ 7x + 2y + 2z = 0 \end{array}\right\}$$

Aquest sistema té com a solució única $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Per tant, els vectors són linealment independents.

24. **(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 0)**

Explica per què si en un conjunt de vectors hi ha el vector zero, llavors són L.D.

- Apliquem la propietat fonamental:

  $$x(1, 0, 0) + y(1, 1, 0) + z(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

  Si fem $x = 0$, $y = 0$, z pot adoptar qualsevol valor, per tant, els vectors són *linealment dependents.*

- Si en un conjunt de vectors $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ hi ha el vector zero, podem aconseguir una combinació lineal d'aquests:

  $$x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \ldots + x_{n-1}\vec{u}_{n-1} + x_n\vec{0} = (0, 0, 0, \ldots, 0)$$

  en la qual $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$ i $x_n \neq 0$. Com que no tots els coeficients són nuls, els vectors són linealment dependents.

Pàgina 48

25. Calcula el rang de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a + 1a \\ 3a - 2 \cdot 1a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a - 2 \cdot 2a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & -20 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mathit{ran}\,(A) = 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a - 1a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a + 2a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mathit{ran}\,(B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a + 1a \\ 3a - 2 \cdot 1a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a - 5 \cdot 2a \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mathit{ran}\,(C) = 2$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a + 1a \\ 4a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ -2 \cdot 3a + 2a \\ 4a - 4 \cdot 2a \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a \\ 4a + 3a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mathit{ran}\,(D) = 3$$

Pàgina 49

26. Demostra que els vectors (7, 2, –1, 0), (0, 4, 0, 5), (0, 0, –2, 0) són L.I.

$\alpha\,(7, 2, -1, 0) + \beta\,(0, 4, 0, 5) + \gamma\,(0, 0, -2, 0) = (0, 0, 0, 0)$

De la primera component:

$7\alpha + \beta 0 + \gamma 0 = 0 \;\rightarrow\; \alpha = 0$

De la segona component:

$2\alpha + 4\beta + \gamma 0 = 0$ con que $\alpha = 0 \;\rightarrow\; \beta = 0$

De la tercera component:

$-\alpha + \beta 0 - 2\gamma = 0$ con que $\alpha = 0 \;\rightarrow\; \gamma = 0$

L'única solució per l'equació és $\alpha = \beta = \gamma = 0$, i per tant vector L.I.

Pàgina 54

EXERCICIS I PROBLEMES PROPOSATS

PER PRACTICAR

Operacions amb matrius

27. Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$**, calcula:**

a) $-2A + 3B$ **b)** $\frac{1}{2}A \cdot B$ **c)** $B \cdot (-A)$ **d)** $A \cdot A - B \cdot B$

a) $\begin{pmatrix} -23 & 4 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -17/2 & -2 \\ -11/2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 21 & -6 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 43 & -16 \\ 24 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -16 \\ 22 & -9 \end{pmatrix}$

28. Efectua el producte $(-3 \quad 2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$(7 \quad 7)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (7)$

29. a) Són iguals les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **i** $B = (2 \quad 3)$**?**

b) Troba, si és possible, les matrius AB; BA; $A + B$; $A^t - B$.

a) No, A té dimensió 2×1 i B té dimensió 1×2. Perquè dues matrius siguin iguals, han de tenir la mateixa dimensió i coincidir terme a terme.

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$; $B \cdot A = (1 \quad 3)$; $A + B$ no es pot fer, ja que no tenen la mateixa dimensió.

$A^t - B = (2 \quad 3) - (2 \quad 3) = (0 \quad 0)$

30. Donades les matrius: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **i** $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **comprova que:**

a) $(A + B)^t = A^t + B^t$

b) $(3A)^t = 3A^t$

$$\left.\begin{aligned} &\text{a) } (A+B)^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &A^t + B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} (A+B)^t = A^t + B^t$$

b) $(3A)^t = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

$3A^t = 3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

$\Bigg\}\ (3A)^t = 3A^t$

31. **Calcula $3AA^t - 2I$, si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.**

$$3A\,A^t - 2I = 3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 10 & 17 \\ 17 & 29 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 30 & 51 \\ 51 & 87 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 51 \\ 51 & 85 \end{pmatrix}$$

32. **Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, comprova que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.**

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

33. **Calcula, en cada cas, la matriu B que verifica la igualtat:**

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow 3B = 2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 4/3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

34. **Donades les matrius: A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ i B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.**

a) Calcula $A \cdot B$ i $B \cdot A$.

b) Comprova que $(A + B)^2 = A^2 + B^2$

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

b) $(A+B)^2 = \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

35. **Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, comprova que $(A+I)^2 = 0$ i expressa A^2 com a combinació lineal de A i I.**

$A + I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ $\qquad (A+I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 = -2\text{A} - \text{I}$

Equacions amb matrius

36. **Troba les matrius X i Y que verifiquen el sistema**

$$2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left.\begin{aligned} 2X + Y &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$ Sumant les dues equacions, queda:

$$3X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aïllem Y en la segona equació:

$$Y = X - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, $X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $Y = \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

37. **Calcula X de tal manera que $X - B^2 = A \cdot B$, si:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$X = A \cdot B + B^2$

$$\left.\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ B^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

38. **Determina els valors de m per als quals**
$X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ verifiqui $X^2 - \frac{5}{2}X + I = 0$.

$$X^2 - \frac{5}{2}X + I = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 - (5/2)m + 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ha de complir-se que:

$$m^2 - \frac{5}{2}m + 1 = 0 \rightarrow 2m^2 - 5m + 2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow m = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} m = 2 \\ m = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Hi ha dues solucions: $m_1 = 2$; $m_2 = \frac{1}{2}$

39. **Resol:** $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2x \\ 3y - 2 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} x - y = 3 + 2x \\ 3x + 2y = 3y - 2 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x + y = -3 \\ 3x - y = -2 \end{matrix}\right\}$$

Sumant: $4x = -5 \rightarrow x = \frac{-5}{4} \rightarrow y = -3 - x = -3 + \frac{5}{4} = \frac{-7}{4}$

Solució: $x = \frac{-5}{4}$; $y = \frac{-7}{4}$

40. **Troba dos matrius A i B en les quals:**

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} \qquad -A + 5B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & +2 & -1 \\ 3 & +4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Per a cada element cal plantejar $\begin{cases} 2a_{11} + 3b_{11} = 8 \\ -a_{11} + 5b_{11} = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} a_{11} = 1 \\ b_{11} = 2 \end{matrix}$

i així per a tots els elements.

41. **Troba X i Y sabent que $5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$ i $3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$**

Per a cada element cal plantejar $\begin{cases} 5x_{11} + 3y_{11} = 2 \\ 3x_{11} + 2y_{11} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x_{11} = 1 \\ y_{11} = -1 \end{matrix}$

$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Matriu inversa

42. **Comprova que la matriu inversa de A és A^{-1}:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$A \cdot A^{-1} = I$

43. **Quina és la matriu inversa de la matriu unitat?**

La matriu unitat, I.

44. **Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ prova quina de les matrius següents és la seva inversa:**

$$M = \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

La matriu inversa és N ja que $A \cdot N = N \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

45. **Troba la matriu inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.**

$|A| = 2 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$|B| = -4 \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$

C no té inversa, ja que $|C| = 0$.

Pàgina 55

Rang d'una matriu

46. **Estudia el rang de les matrius següents:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 12 & -24 & 36 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

rang $A = 1$ 2a fila = 2 · 1a fila

rang $B = 2$ $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

rang $C = 1$ El determinant 3×3 i tots els determinants 2×2 són igual a zero.

rang $D = 2$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

47. **Estudia el rang d'aquestes matrius i digues, en cada cas, el nombre de columnes que són L.I.:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{1a} \\ \text{2a} - 2 \cdot \text{1a} \\ \text{3a} - \text{1a} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 5 & 27 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{1a} \\ \text{2a} \\ \text{3a} + 2 \cdot \text{2a} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 11 & 41 \end{pmatrix} \rightarrow ran\ (A) = 3$$

Hi ha tres columnes linealment independents en A.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{1a} \\ \text{2a} - 2 \cdot \text{1a} \\ \text{3a} - 3 \cdot \text{1a} \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{1a} \\ \text{2a} \\ \text{3a} - \text{2a} \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran\ (B) = 2$$

Hi ha dues columnes linealment independents en B.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{3a} \\ \text{2a} \\ \text{1a} \\ \text{4a} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{1a} \\ \text{2a} - \text{1a} \\ \text{3a} - \text{1a} \\ \text{4a} - 3 \cdot \text{1a} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&4&2&2\\0&-4&-2&-2\\0&4&2&2\end{pmatrix} \to \begin{matrix}\text{1a}\\\text{2a}\\\text{3a}+\text{2a}\\\text{4a}-\text{2a}\end{matrix} \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&4&2&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \to ran\,(C) = 2$$

Hi ha dues columnes linealment independents en C.

$$D = \begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&1&1&-1\end{pmatrix} \to \begin{matrix}\text{1a}\\\text{2a}-\text{1a}\\\text{3a}-\text{1a}\\\text{4a}-\text{1a}\end{matrix} \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-2&0&-2\\0&0&-2&-2\\0&0&0&-2\end{pmatrix} \to ran\,(D) = 4$$

Les quatre columnes de D són linealment independents.

Pàgina 55

PER RESOLDRE

48. **Comprova que $A^2 = 2A - I$, si: $A = \begin{pmatrix}5&-4&2\\2&-1&1\\-4&4&-1\end{pmatrix}$ i I la matriu unitat d'ordre 3.**

Utilitza aquesta igualtat per calcular A^4.

$$\left.\begin{array}{l} A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix}9&-8&4\\4&-3&2\\-8&8&-3\end{pmatrix} \\[2ex] 2A - I = \begin{pmatrix}10&-8&4\\4&-2&2\\-8&8&-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9&-8&4\\4&-3&2\\-8&8&-3\end{pmatrix}\end{array}\right\} A^2 = 2A - I$$

Calculem A^4:

$$A^4 = (A^2)^2 = (2A - I)^2 = (2A - I)(2A - I) = 4A^2 - 2A - 2A + I^2 =$$

$$= 4(2A - I) - 4A + I = 8A - 4I - 4A + I = 4A - 3I =$$

$$= 4\begin{pmatrix}5&-4&2\\2&-1&1\\-4&4&-1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}20&-16&8\\8&-4&4\\-16&16&-4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17&-16&8\\8&-7&4\\-16&16&-7\end{pmatrix}$$

49. **Determina a i b de forma que la matriu**

$A = \begin{pmatrix}2&-1\\a&b\end{pmatrix}$ verifiqui $A^2 = A$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix}2&-1\\a&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\a&b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-a&-2-b\\2a+ab&-a+b^2\end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 4-a & -2-b \\ 2a+ab & -a+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 4-a=2 & \rightarrow \quad a=2 \\ -2-b=-1 & \rightarrow \quad b=-1 \\ 2a+ab=a & \rightarrow \quad 4-2=2 \\ -a+b^2=b & \rightarrow \quad -2+1=-1 \end{cases}$$

Per tant, $a = 2$ i $b = -1$.

50. Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, troba una matriu B de tal manera que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} AB = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculem A^{-1}: $|A| = -3$; $A^{-1} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Per tant:

$$B = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

51. Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, calcula $A^2, A^3, \ldots, A^{128}$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & +1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con que $A^3 = \mathrm{I}$, qualsevol potència a partir d'aquí segueix la pauta següent:

$A^4 = A \qquad A^5 = A^2 \qquad A^6 = A^3 = \mathrm{I}$ i per tant:

$A^{3n+2} = A^2$

$A^{3n} = \mathrm{I}$

con que $128 = 3n + 2$, on $n = 42 \rightarrow A^{128} = A^2$

52. Calcula A^n i B^n si: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Així, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ho comprovem per inducció:

Acabem de comprovar que per a $n = 2$ (primer cas rellevant), funciona.

Suposem que és cert per a $n - 1$:

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n-1/7 & n-1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$$

Per tant, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Ho comprovem per inducció:

Igual que en el cas anterior, per a $n = 2$ es compleix.

Suposem que és cert per a $n - 1$:

$$B^n = B^{n-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

53. Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, prova que A^3 és la matriu nul·la.

Demostra després que la matriu $I + A + A^2$ és la matriu inversa de $I - A$.

☛ ***Multiplica $I + A + A^2$ per $I - A$.***

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Veiem que $I + A + A^2$ és la inversa de $I - A$:

$$(I + A + A^2)(I - A) = I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 = I - A^3 = I - \mathbf{0} = I.$$

Com que $(I + A + A^2) \cdot (I - A) = I$, aleshores $I + A + A^2$ és la inversa de $I - A$.

54. a) Comprova que la inversa de A és A^{-1}:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A^{-1}} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -3/5 & 6/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcula la matriu X que verifica $XA = B$, essent A la matriu anterior i $B = (1 \;\; -2 \;\; 3)$.

a) $A \cdot A^{-1} = I$

b) $XA = B \;\rightarrow\; X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \;\rightarrow\; X = B \cdot A^{-1}$

Per tant:

$$X = (1 \;\; -2 \;\; 3)\begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -3/5 & 6/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & -2 \end{pmatrix}$$

55. **Estudia la dependència o independència lineal dels següents conjunts de vectors:**

a) $\vec{u}_1 = (1, -1, 3, 7)$, $\vec{u}_2 = (2, 5, 0, 4)$ **i digues quin és el rang de la matriu les columnes de la qual són** $\vec{u}_1$ **i** $\vec{u}_2$**.**

b) $\vec{v}_1 = (1, 0, -2, 3, 1)$, $\vec{v}_2 = (2, -1, 3, 0, 2)$, **i** $\vec{v}_3 = (4, -1, -1, 6, 4)$ **i digues quin és el rang de la matriu les files de la qual són** $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$**.**

a) $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ són linealment independents ja que no són proporcionals.

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \\ 3 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

b) $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3 = (0, 0, 0, 0, 0)$

$$\begin{cases} 0 = \alpha + 2\beta + 4\gamma \\ 0 = -\beta - \gamma \\ 0 = -2\alpha + 3\beta - \gamma \\ 0 = 3\alpha + 6\gamma \\ 0 = \alpha + 2\beta + 4\gamma \end{cases}$$

sistema compatible indeterminat

$\alpha = -2\lambda$, $\beta = -\lambda$, $\gamma = \lambda$ per exemple $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$

vectors linealment dependents

El rang de la matriu serà 2.

56. **Estudia la dependència lineal dels següents conjunts de vectors segons els valors del paràmetre** ***t*****:**

a) $\vec{u}_1 = (1, -1, 0, 2)$, $\vec{u}_2 = (2, 0, 1, -2)$,
$\vec{u}_3 = (3, 1, 1, t)$

b) $\vec{v}_1 = (2, -2, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 5, 3, 3)$,
$\vec{v}_3 = (1, 1, t, 1)$, $\vec{v}_4 = (2, 6, 4, 4)$

a) Hem d'estudiar el rang de la matriu:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a - 3 \cdot 1a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 4 & 1 & t-6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a - 2 \cdot 2a \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 4 & -1 & t+6 \end{pmatrix} \rightarrow \; ran\,(M) = 3 \text{ per a qualsevol valor de } t$$

Els tres vectors són linealment independents, qualsevol que sigui el valor de t.

b) Busquem el rang de la matriu:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & t & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \to \boxed{\begin{matrix} 1a : 2 \\ 2a \\ 4a : 2 \\ 3a \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & t & 1 \end{pmatrix} \to \boxed{\begin{matrix} 1a \\ 2a - 1a \\ 3a - 1a \\ 4^a - 1a \end{matrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & t & 1 \end{pmatrix} \to \boxed{\begin{matrix} 1a \\ 2a : 3 \\ 3a : 2 \\ 4a \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & t & 1 \end{pmatrix} \to \boxed{\begin{matrix} 1a \\ 2a \\ 3a - 2a \\ 4a - 2a \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 & 0 \end{pmatrix}$$

- *Si* $t = 1$, $ran\,(M) = 2 \;\to$ Hi ha dos vectors linealment independents.
- *Si* $t \neq 1$, $ran\,(M) = 3 \;\to$ Hi ha tres vectors linealment independents.

57. **Estudia el rang de les matrius següents segons el valor del paràmetre k:**

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \to \boxed{\begin{matrix} 1a \\ 2a - 1a \\ 3a - 2 \cdot 1a \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \to$$

$\to ran\,(M) = 3$ per a qualsevol valor de k.

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \to \boxed{\begin{matrix} 1a \\ 2a + 1a \\ 2 \cdot 3a - 1a \end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1+2k & 0 \end{pmatrix} \to 1 + 2k = 0 \text{ si } k = -\frac{1}{2}$$

- *Si* $k = -\frac{1}{2}$, $ran\,(N) = 2$.
- *Si* $k \neq -\frac{1}{2}$, $ran\,(N) = 3$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \to \boxed{\begin{matrix} 1a \\ 3a : 4 \\ 2a \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \end{pmatrix} \to \boxed{\begin{matrix} 1a \\ 2a - 1a \\ 3a - 2 \cdot 1a \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 \end{pmatrix}$$

- *Si* $k = -2 \;\to\; ran\,(P) = 1$
- *Si* $k \neq -2 \;\to\; ran\,(P) = 2$

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix} \to \boxed{\begin{matrix} 1a \\ 2a + 1a \\ 3a + 2 \cdot 1a \end{matrix}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & 3 & k+4 \end{pmatrix} \to \boxed{\begin{matrix} 1a \\ 2a \\ 3a - 3 \cdot 2a \end{matrix}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

- *Si* $k = 2 \rightarrow ran\,(Q) = 2$
- *Si* $k \neq 2 \rightarrow ran\,(Q) = 3$

58. Troba el valor de k perquè el rang de la matriu A sigui 2.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a + 1a \\ 3a \end{array} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a + 2a \end{array} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & k-2 & 0 \end{pmatrix}$$

Perquè $ran\,(A) = 2$, ha de ser $k - 2 = 0$; és a dir, $k = 2$.

59. Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, troba dos nombres reals m i n tals que $A + mA + nI = 0$.

$$A + mA + nI = \mathbf{0} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 + 2m + n & 1 + m \\ 2 + 2m & 3 + 3m + n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2 + 2m + n = 0 & \rightarrow & n = 0 \\ 1 + m = 0 & \rightarrow & m = -1 \\ 2 + 2m = 0 & \rightarrow & m = -1 \\ 3 + 3m + n = 0 & \rightarrow & n = 0 \end{cases}$$

Solució: $m = -1$; $n = 0$

60. Determina, si és possible, un valor de k perquè la matriu $(A - kI)^2$ sigui la matriu nul·la, si:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A - kI = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$$

$$(A - kI)^2 = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2-1 & 2k-2 & 4k-4 \\ 2k-2 & k^2-1 & 4k-4 \\ 2-2k & 2-2k & k^2-6k+5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow k = 1$$

Pàgina 56

61. **En un edifici hi ha tres tipus d'habitatges: L3, L4 i L5. Els habitatges L3 tenen 4 finestres petites i 3 de grans; els L4 tenen 5 finestres petites i 4 de grans, i els L5, 6 de petites i 5 de grans. Cada finestra petita té 2 vidres i 4 frontisses, i les grans, 4 vidres i 6 frontisses.**

a) Escriu una matriu que descrigui el nombre i grandària de finestres de cada habitatge i una altra que expressi el nombre de vidres i frontisses de cada tipus de finestra.

b) Calcula la matriu que expressa el nombre de vidres i de frontisses de cada tipus d'habitatge.

a) $\begin{array}{c} \\ L3 \\ L4 \\ L5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} P & G \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$; $\begin{array}{c} \\ P \\ G \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} V & F \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$

b) $\begin{array}{c} \\ L3 \\ L4 \\ L5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} P & G \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ P \\ G \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} V & F \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ L3 \\ L4 \\ L5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} V & F \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 20 & 34 \\ 26 & 44 \\ 32 & 54 \end{pmatrix} \end{array}$

62. **Un industrial fabrica dos tipus de bombetes: transparents (T) i opaques (O). De cada tipus se'n fan quatre models: M_1, M_2, M_3 i M_4.**

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{M_1} \\ \mathbf{M_2} \\ \mathbf{M_3} \\ \mathbf{M_4} \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} \mathbf{T} & \mathbf{O} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{300} & \mathbf{200} \\ \mathbf{400} & \mathbf{250} \\ \mathbf{250} & \mathbf{180} \\ \mathbf{500} & \mathbf{300} \end{pmatrix} \end{array}$$

Aquesta taula mostra la producció setmanal de bombetes de cada tipus i model.

El percentatge de bombetes defectuoses és el 2% en el model M_1, el 5% en el M_2, el 8% en el M_3 i el 10% en el M_4.

Calcula la matriu que expressa el nombre de bombetes transparents i opaques, bones i defectuoses, que es produeixen.

$$\begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}05 & 0{,}08 & 0{,}1 \\ 0{,}98 & 0{,}95 & 0{,}92 & 0{,}9 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} T & O \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 300 & 200 \\ 400 & 250 \\ 250 & 180 \\ 500 & 300 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} T & O \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 96 & 60{,}9 \\ 1\,354 & 869{,}1 \end{pmatrix} \end{array} \approx \begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} T & O \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 96 & 61 \\ 1\,354 & 869 \end{pmatrix} \end{array}$$

63. **Troba totes les matrius X de la forma $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ tals que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.**

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 1 \\ a + b = 0 \\ b^2 = 1 \\ b + c = 0 \\ c^2 = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = \pm 1 \\ a = -b \\ b = \pm 1 \\ c = -b \\ c = \pm 1 \end{array}\right\} \begin{array}{lllll} a = 1 & \to & b = -1 & \to & c = 1 \\ a = -1 & \to & b = 1 & \to & c = -1 \end{array}$$

Hi ha dues solucions: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

64. Calcula una matriu X que commuta amb la matriu A, això és, $A \cdot X = X \cdot A$, quan $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, i calcula $A^2 + 2A^{-1} \cdot X$.

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \\ X \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{ han de ser iguals}$$

$$\left.\begin{array}{l} a + c = a \\ b + d = a + b \\ d = c + d \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} c = 0 \\ d = a \\ c = 0 \end{array}\right\} \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \text{ amb } a, b \in \mathbb{R}$$

$$A^2 + 2A^{-1} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2a & 2+2b-2a \\ 0 & 1+2a \end{pmatrix}$$

(Observem que la matriu que hem obtingut també és de les que commuten amb A.)

65. Siguin A i B les matrius donades per:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Troba les condicions que han de complir els coeficients a, b, c perquè es verifiqui $A \cdot B = B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Perquè $A \cdot B = B \cdot A$, ha de complir-se que:

$$\left.\begin{array}{l} 5a + 2c = 5a + 2b \\ 5b + 2c = 2a + 5b \\ 2a + 5c = 7c \\ 2b + 5c = 7c \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} c = b \\ c = a \\ 7c = 7c \\ 7c = 7c \end{array}\right\} \quad a = b = c$$

66. **Donada la matriu:** $A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-4} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$ **prova que es verifica** $A^3 + I = 0$ **i utilitza aquesta igualtat per obtenir** A^{10}.

☛ ***Fes*** $A^{10} = (A^3)^3 \cdot A$ ***i tingues en compte que*** $A^3 = -I$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}; \quad A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad A^3 + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenim A^{10} (tenint en compte que $A^3 + I = 0 \ \rightarrow \ A^3 = -I$):

$$A^{10} = (A^3)^3 \cdot A = (-I)^3 \cdot A = -I \cdot A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

67. **Una matriu quadrada s'anomena *ortogonal* quan la seva inversa coincideix amb la seva transposada.**

Calcula x **i** y **perquè aquesta matriu** A **sigui ortogonal:** $A = \begin{pmatrix} \mathbf{3/5} & x & \mathbf{0} \\ y & \mathbf{-3/5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

☛ ***Fes*** $A \cdot A^t = I$.

Si $A^{-1} = A^t$, ha de ser $A \cdot A^t = I$; aleshores:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 & y & 0 \\ x & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/25 + x^2 & 3/5y - 3/5x & 0 \\ 3/5y - 3/5x & y^2 + 9/25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{9}{25} + x^2 = 1 \qquad x^2 = \frac{16}{25} \qquad x = \pm\frac{4}{5}$$

$$\frac{3}{5}y - \frac{3}{5}x = 0 \qquad y = x \qquad y = x$$

$$y^2 + \frac{9}{25} = 1 \qquad y^2 = \frac{16}{25}$$

Hi ha dues solucions: $x_1 = \frac{4}{5}$; $y_1 = \frac{4}{5}$ $\qquad x_2 = -\frac{4}{5}$; $y_2 = -\frac{4}{5}$

68. **Resol l'equació matricial:** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{4} \\ \mathbf{22} & \mathbf{14} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix}$$

Per tant:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$$

Solució: $X = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$

QÜESTIONS TEÒRIQUES

69. **Justifica per què no és certa la igualtat: $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$ quan A i B són dues matrius qualssevol.**

$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$

Perquè la igualtat fos certa, hauria de ser $AB = BA$; i, en general, no és cert per a dues matrius qualssevol.

70. **Si A és una matriu de dimensió 2×3:**

a) Hi ha una matriu B tal que $A \cdot B$ sigui una matriu d'una sola fila?

b) I per a $B \cdot A$?

Posa un exemple per a cada cas, si: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) No; $A \cdot B$ tindrà 2 files necessàriament. Per exemple, agafant $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, tenim que: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) Sí; si agafem una matriu de dimensió 1×2 (ha de tenir dues columnes per poder multiplicar $B \cdot A$), el resultat tindrà una sola fila. Per exemple:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = (1 \quad 2)$, aleshores $B \cdot A = (5 \quad 2 \quad 0)$

71. **Si A i B són dues matrius quadrades d'igual grandària. Si A i B són simètriques, ho és també el seu producte $A \cdot B$?**

Si la resposta és afirmativa, justifica-la, i si és negativa, posa'n un contraexemple.

Si A i B són dues matrius quadrades d'igual grandària, simètriques, el seu producte, $A \cdot B$, no té perquè ser una matriu simètrica. Per exemple:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ no és simètrica.

Pàgina 57

72. **Definim la *traça* d'una matriu quadrada A d'ordre 2 com $tr\,(A) = a_{11} + a_{22}$. Prova que si A i B són dues matrius quadrades d'ordre 2, llavors $tr\,(A \cdot B) = tr\,(B \cdot A)$.**

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$; aleshores:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \; tr\,(A \cdot B) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \; tr(B \cdot A) = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22}$$

Per tant, $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$.

73. **A és una matriu quadrada d'ordre 3 tal que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ (A és una matriu diagonal). Prova que el producte de dues matrius diagonals és una matriu diagonal.**

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$, el seu producte és:

$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$, que també és una matriu diagonal.

74. **Siguin $A = (a_{ij})_{m,n}$, $B = (b_{ij})_{n,p}$, $C = (c_{ij})_{q,r}$. Quines condicions han de complir p, q i r perquè es puguin efectuar les operacions següents?**

a) $A \cdot C \cdot B$ **b)** $A \cdot (B + C)$

a) $n = q = r$ b) $\left. n = q; \; p = r \right\}$

75. **A és una matriu de dues files i dues columnes el rang de la qual és 2. En pot variar el seu rang si li afegim una fila o una columna?**

No, perquè el nombre de files linealment independents coincideix amb el nombre de columnes linealment independents. Si afegim una fila, A seguiria tenint dues columnes; i si afegim una columna, A seguiria tenint dues files. Per tant, el rang seguiria sent 2.

76. **Una matriu de 3 files i 3 columnes té rang 3.**

a) Com pot variar el rang si li traiem una columna?

b) Si li suprimim una fila i una columna, podem assegurar que el rang de la matriu que en resulti serà 2?

a) Tindrà rang dos.

b) No. Podria ser dos o un. Per exemple:

Si en $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ suprimim la primera fila i la tercera columna,

queda $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, que té rang 1 ($A$ tenia rang 3).

77. a) Si A és una matriu regular d'ordre n i hi ha una matriu B de tal manera que $AB + BA = 0$, prova que $BA^{-1} + A^{-1}B = 0$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, troba una matriu $B \neq 0$ que compleixi $AB + BA = 0$.

a) Multipliquem per A^{-1} per l'esquerra en la igualtat:

$AB + BA = \mathbf{0} \;\rightarrow\; A^{-1}AB + A^{-1}BA = \mathbf{0} \;\rightarrow\; B + A^{-1}BA = \mathbf{0}$

Ara multipliquem la igualtat obtinguda per A^{-1} per la dreta:

$BA^{-1} + A^{-1}BAA^{-1} = \mathbf{0} \;\rightarrow\; BA^{-1} + A^{-1}B = \mathbf{0}$

b) Si $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, aleshores:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a - 2c & -3b - 2d \\ 4a + 3c & 4b + 3d \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a + 4b & -2a + 3b \\ -3c + 4d & -2c + 3d \end{pmatrix}$$

Així:

$$AB + BA = \begin{pmatrix} -6a + 4b - 2c & -2a - 2d \\ 4a + 4d & 4b - 2c + 6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -6a + 4b - 2c = 0 \\ -2a - 2d = 0 \\ 4a + 4d = 0 \\ 4b - 2c + 6d = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3a - 2b + c = 0 \\ a + d = 0 \\ a + d = 0 \\ 2b - c + 3d = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ d = -a \\ \\ \rightarrow 3a - 2b + c = 0 \;\rightarrow \\ \rightarrow c = -3a + 2b \end{array}$$

Per tant: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -3a + 2b & -a \end{pmatrix}$, a i $b \neq 0$

Per exemple, amb $a = 1$ i $b = 1$, queda $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

78. Demostra que si una matriu verifica $A^2 = 0$ (0 és la matriu nul·la), aleshores A no pot tenir inversa.

Suposem que es verifica que $A^2 = \mathbf{0}$, però que A sí té inversa, que existeix A^{-1}.

Multiplicant la igualtat $A^2 = \mathbf{0}$ per $(A^{-1})^2$, quedaria:

$(A^{-1})^2 \cdot A^2 = \mathbf{0} \;\rightarrow\; (A^{-1} \cdot A)^2 = 0 \;\rightarrow\; I = \mathbf{0}$; la qual cosa és absurda.

Per tant, deduïm que no existeix A^{-1}.

79. ¿És possible afegir una fila a la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ de forma que la nova matriu tingui rang 4?

Raona la resposta.

Calculem el rang de la matriu donada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \text{1a} \\ \text{2a} \\ \text{3a} - 2 \cdot \text{1a} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \text{1a} \\ \text{2a} \\ \text{3a} - 3 \cdot \text{2a} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Té rang 2; així doncs, afegint una fila, la matriu resultant no podrà tenir rang 4 (tindria rang 2 o 3).

PER APROFUNDIR

80. **A i B són dues matrius quadrades del mateix ordre. De la igualtat $A \cdot B = A \cdot C$ no pot deduir-se, en general, que $B = C$.**

a) Prova aquesta afirmació buscant dues matrius B i C diferents de manera que $A \cdot B = A \cdot C$, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Quina condició ha de complir la matriu A perquè de $A \cdot B = A \cdot C$ es pugui deduir que $B = C$?

a) Per exemple, si $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, aleshores:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = A \cdot C, \text{ però } B \neq C.$$

b) Ha d'existir A^{-1}.

81. **Prova que qualsevol matriu quadrada d'ordre 3 pot escriure's com a suma d'una matriu simètrica i una altra d'antisimètrica.**

Tenim una matriu quadrada d'ordre 3

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

$$A + A^t = \begin{pmatrix} 2a & b+d & c+g \\ d+b & 2e & f+h \\ g+c & h+f & 2i \end{pmatrix} \text{ simètrica}$$

$$A - A^t = \begin{pmatrix} 0 & b-d & c-g \\ d-b & 0 & f-h \\ g-c & h-f & 0 \end{pmatrix} \text{ antisimètrica}$$

$$(A + A^t) + (A - A^t) = \begin{pmatrix} 2a & b+d & c+g \\ d+b & 2e & f+h \\ g+c & h+f & 2i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b-d & c-g \\ d-b & 0 & f-h \\ g-c & h-f & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = 2A$$

$$A = \frac{1}{2}\,[(A + A^t) + (A - A^t)] = \frac{1}{2}\,(A - A^t) + \frac{1}{2}\,(A - A^t)$$

$\frac{1}{2}\,(A + A^t)$ simètrica i $\frac{1}{2}\,(A - A^t)$ antisimètrica

82. **Estudia el rang de les matrius següents segons els valors de a:**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & a \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & a \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{1a} \\ \text{2a} - 2 \cdot \text{1a} \\ \text{3a} - \text{1a} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a+2 \\ a-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- *Si* $a = 1$, *ran* $(M) = 2$
- *Si* $a = -2$, *ran* $(M) = 2$
- *Si* $a \neq 1$ *i* $a \neq -2$, *ran* $(M) = 3$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{1a} \\ \text{2a} \\ \text{3a} - \text{1a} \end{matrix} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- *Si* $a = 0$, *ran* $(A) = 2$
- *Si* $a \neq 0$, *ran* $(A) = 3$

83. Es diu que una matriu és *antisimètrica* quan la seva transposada és igual a la seva oposada. Obtén la forma general d'una matriu d'ordre 2 que sigui antisimètrica.

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, aleshores $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ i $-A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$.

Perquè $A^t = -A$, ha de ser:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} a = -a \\ c = -b \\ b = -c \\ d = -d \end{matrix}\right\} \begin{matrix} a = 0 \\ c = -b \\ \\ d = 0 \end{matrix}$$

Per tant, una matriu *antisimètrica d'ordre 2* és de la forma: $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$.

PER PENSAR UNA MICA MÉS

84. Recorda que una matriu A és *simètrica* si $A^t = A$. Una matriu s'anomena *antisimètrica* si $-A^t = A$. (Tant les matrius simètriques com les antisimètriques són, òbviament, quadrades.) Demostra que en una matriu antisimètrica tots els elements de la diagonal principal són zeros.

- Si $A = (a_{ij})_{n \times n}$, els elements de la seva diagonal principal són a_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- La transposada és $A^t = (a_{ji})_{n \times n}$; els elements de la seva diagonal principal també seran a_{ii} (els mateixos que els de A).
- L'oposada de la transposada és $-A^t = (a_{ji})_{n \times n}$; els elements de la seva diagonal principal seran $-a_{ii}$.
- Perquè $-A^t = A$, han de ser $a_{ii} = -a_{ii}$; per tant, $a_{ii} = 0$, $i = 1, \ldots, n$ (és a dir, els elements de la diagonal principal són zeros).

85. Diem que una matriu quadrada és *màgica* de suma k quan la suma dels elements de cada fila, com també els de cada columna i els de les dues diagonals, és, en tots els casos, igual a k. Quant val k si una matriu màgica és antisimètrica? Troba totes les matrius màgiques antisimètriques d'ordre 3.

- Hem vist en l'exercici anterior que, en una matriu antisimètrica, els elements de la diagonal principal són zeros. Per tant, si la matriu és antisimètrica, $k = 0$.

- Busquem les matrius màgiques antisimètriques d'ordre 3 (sabem que, en aquest cas, la suma ha de ser zero).

  Vegem com és una matriu antisimètrica d'ordre 3:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot A \text{ antisimètrica si } A^t = -A; \text{ és a dir:}$$

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a = -a & b = -d & c = -g \\ d = -b & e = -e & f = -h \\ g = -c & h = -f & i = -i \end{cases}$$

  Així doncs, una matriu *antisimètrica* d'ordre 3 és de la forma: $A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}$

  Perquè A sigui *màgica*, ha de donar-se que: $\left.\begin{array}{r} b + c = 0 \\ -b + f = 0 \\ -c - f = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -b - c = 0 \\ b - f = 0 \\ c + f = 0 \end{array}\right\}$

  és a dir: $\begin{cases} c = -b \\ f = \ \ b \end{cases}$

  Per tant, les matrius màgiques antisimètriques d'ordre 3 són de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & -b \\ -b & 0 & b \\ b & -b & 0 \end{pmatrix}, \text{ amb } b \in \mathbb{R}.$$

86. Obtén totes les matrius màgiques simètriques d'ordre 3 per a $k = 0$.

Una matriu simètrica d'ordre 3 és de la forma:

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ (ja que $A = A^t$). Perquè sigui màgica amb $k = 0$, ha de ser:

$$\left.\begin{array}{l} a + b + c = 0 \\ b + d + e = 0 \\ c + e + f = 0 \\ a + d + f = 0 \\ 2c + d = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} \text{1a} \\ \text{2a} \\ \text{3a} \\ \text{4a} - \text{1a} \\ \text{5a} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} \text{1a} \\ \text{2a} \\ \text{3a} \\ \text{4a} + \text{2a} \\ \text{5a} \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} \text{1a} \\ \text{2a} \\ \text{3a} \\ \text{4a} + \text{3a} \\ \text{5a} - 2 \cdot \text{3a} \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} \text{1a} \\ \text{2a} \\ \text{3a} \\ \text{4a} : 2 \\ \text{5a} + \text{4a} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{l} a+b+c = 0 \to a = -b-c = -f \\ b + d + e = 0 \to b = -e = f \\ c + e + f = 0 \to c = 0 \\ d + e + f = 0 \to e = -f \\ 3d = 0 \to d = 0 \end{array}\right.$$

Per tant, una *matriu màgica simètrica d'ordre 3 amb* $k = 0$, és de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} -f & f & 0 \\ f & 0 & -f \\ 0 & -f & f \end{pmatrix}, \text{ amb } f \in \mathbb{R}.$$

87. Obtén totes les matrius màgiques simètriques d'ordre 3 per a $k = 3$.

Una matriu *simètrica* d'odre 3 és de la forma: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$

Perquè sigui màgica amb $k = 3$, ha de ser:

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c = 3 \\ b + d + e = 3 \\ c + e + f = 3 \\ a + d + f = 3 \\ 2c + d = 3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a \\ 4a - 1a \\ 5a \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a \\ 4a + 2a \\ 5a \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a \\ 4a + 3a \\ 5a - 2 \cdot 3a \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a \\ 4a : 2 \\ 5a + 4a \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left\{\begin{array}{l} a+b+c = 3 \to a = 3-b-c = 3-f-1 = 2-f \\ b + d + e = 3 \to b = 3-d-e = 3-1-2+f = f \\ c + e + f = 3 \to c = 3-e-f = 3-2+f-f = 1 \\ d + e + f = 3 \to e = 3-d-f = 3-1-f = 2-f \\ 3d = 3 \to d = 1 \end{array}\right.$$

Per tant, una *matriu màgica simètrica d'ordre 3 amb* $k = 3$, és de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 2-f & f & 1 \\ f & 1 & 2-f \\ 1 & 2-f & f \end{pmatrix}, \text{ amb } f \in \mathbb{R}$$

Per exemple, amb $f = 0$, queda: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.